

代数学基礎演習 IX

1. 部分群の包含列 $H < K < G$ を考える。 H が K の正規部分群であるためには $K < N_G(H)$ が必要十分であることを示せ。
2. G 自身と $\{e\}$ 以外に正規部分群をもたない群 G を単純群という。位数 60 の単純群 G は位数 15, または 30 の部分群をもたないことを示せ (ヒント: そのような部分群 H があったとして $N_G(H)$ を考え, $[G : N_G(H)]$ を観察せよ。また 5-Sylow 部分群について考えてみよ)。
3. p を素数とする。
 - (i) 位数が p の群は巡回群に同型なことを示せ。
 - (ii) 位数が p^2 の群はアーベル群であることを用いて, それらの群を同型を除いて全て分類せよ。
4. p, q を相異なる素数とする。
 - (i) 位数 p^2q^2 のアーベル群を (同型を除いて) 分類せよ。
 - (ii) G を位数が p^2q^2 の群で, さらに位数 p^2, pq, q^2 の元を持たないとする。このとき G はアーベル群ではないことを示せ (ヒント: アーベル群であるとして矛盾を導くとよい)。
5. S_3 の 2-Sylow 部分群, 3-Sylow 部分群をそれぞれすべて求めよ。
6. S_4 の 2-Sylow 部分群, 3-Sylow 部分群をすべて求めよ。
7. 正 5 角形の合同変換群 D_5 (位数 10) の 2-Sylow 部分群, 5-Sylow 部分群をすべて求めよ。
8. 位数 15 の群 G を考える。
 - (i) G は位数 5 の部分群を丁度 1 つだけ含むことを示せ。
 - (ii) G はアーベル群, さらに強く巡回群 $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ に同型であることを示せ。
9. S_5 は位数 15 の部分群をもたないことを示せ (ヒント: 5. よりそのような部分群は巡回群であるが, S_5 は位数 15 の元をもたないことを示せばよい)。
10. 素数 p が G の位数を割り切るとき, G は位数 p の元を含む (Cauchy の定理) ことを示せ。
11. p を素数とする。
 - (i) $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は p 個の元 $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ からなる体であることを示せ。
 - (i) $GL_2(\mathbb{F}_p)$ の位数を求めよ。
 - (ii) $SL_2(\mathbb{F}_p)$ の位数を求めよ。 ($\det : GL_n(\mathbb{F}_p) \rightarrow (\mathbb{F}_p)^\times$ は全射で, $\ker(\det) = SL_n(\mathbb{F}_p)$.)
12. p を素数とする。
 - (i) $GL_2(\mathbb{F}_p)$ の p -Sylow 部分群をひとつ与えよ。
 - (ii) $GL_2(\mathbb{F}_p)$ の p -Sylow 部分群の個数を求めよ。 (ヒント: (i) で与えた p -Sylow 部分群 H の正規化部分群を $N_G(H)$ を考えてみよ。群 G の p -Sylow 部分群は互いに共役であることを用い, さらに H と共役な部分群全体は $G/N_G(H)$ と 1:1 に対応するのであった。)