

代数学基礎演習 VIII

1. (i) アーベル群 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は同型でないことを示せ。
 (ii) 位数 4 の群はかならずアーベル群で、実際 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のいずれかに同型なことを示せ。
2. (i) 乗法群 $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times = \{k \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \mid (k, 12) = 1\}$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ のいずれに同型であるか、選んで記せ (整数 m, n に関して (m, n) は m と n の最大公約数を表すとする)。
 (ii) $V = \{e, (12)(34), (14)(23), (13)(24)\} \triangleleft \mathfrak{S}_4$ について、 V は $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ あるいは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のいずれに同型であるか、選んで記せ。
3. 写像 $f: G \rightarrow \text{Aut}(G)$ を $g \mapsto f_g$ (但し $f_g(x) = gxg^{-1}$, $x \in G$) で与える (IV-10 を参照)。
 (i) f は群準同型であることを示せ。
 (ii) $\ker f = Z(G)$ を示し、 $G/Z(G) \simeq \text{Int}(G) := \text{im } f$ を示せ。
4. 群準同型 $f: \mathfrak{S}_3 \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{S}_3)$, $\sigma \mapsto f_\sigma$ (但し $f_\sigma(\tau) = \sigma\tau\sigma^{-1}$, $\tau \in \mathfrak{S}_3$) を考える。
 (i) $\ker f = \{e\}$ を示せ。
 (ii) $\text{im } f = \text{Aut}(\mathfrak{S}_3)$ を示し、 $\mathfrak{S}_3 \simeq \text{Int}(\mathfrak{S}_3) = \text{Aut}(\mathfrak{S}_3)$ を示せ。
6. 群 G, H に関して、群準同型 $\varphi: H \rightarrow \text{Aut}(G)$ が与えられているとする。直積集合 $H \times G$ に次のように演算を定義するとき、 $H \times G$ は群になることを示せ (この群を $H \ltimes G$ とかく)。

$$(h_1, g_1) \cdot (h_2, g_2) = (h_1 h_2, g_1 \varphi(h_1)(g_2)), \quad h_1, h_2 \in H, g_1, g_2 \in G$$
7. G を群とし、 X を G から $\mathbb{C}$ への関数全体の集合とする。 G は X に

$$f(x) \mapsto (\rho(g)f)(x) := f(g^{-1}x), \quad g, x \in G$$
 によって作用することを示せ。
8. G を群 $X = \{G \text{ の部分群全体} \}$ とする。
 (i) G は X に $H \mapsto gHg^{-1}$ によって作用することを示せ。
 (ii) $H \in X$ に対して $N_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ とする。 $N_G(H) < G$ であり、また $H \triangleleft N_G(H)$ であることを示せ。
 (iii) $G/N_G(H) \simeq \{H \text{ と共役な } G \text{ の部分群全体} \}$ であることを示せ。
9. 部分群 $H = \{e, (12)\} < \mathfrak{S}_3$ を考える。
 (i) $N_{\mathfrak{S}_3}(H) < \mathfrak{S}_3$ を決定せよ。
 (ii) 全単射写像 $\mathfrak{S}_3/N_{\mathfrak{S}_3}(H) \simeq \{H \text{ と共役な } \mathfrak{S}_3 \text{ の部分群全体} \}$ を具体的に記述せよ。

10. $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$ に対して, v を通る半直線 $\langle v \rangle_+ := \{av \mid a > 0\}$ を考える。行列とベクトルの積による $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}^2$ への作用から $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の半直線全体の集合 $X = \{\langle v \rangle_+ \mid 0 \neq v \in \mathbb{R}^2\}$ への作用が自然に定まる。

(i) $e_1 = {}^t(1, 0)$ とする。 $\langle e_1 \rangle_+ \in X$ の固定化部分群は

$$B^\circ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}$$

であることを示せ。

(ii) 写像 $f : \mathrm{SO}(2) \times B^\circ \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$; $f(Q, M) = QM$, は全単射 (もっと強く同相) であることを示せ。