

代数学基礎演習 VII

1. G が X に作用しているとする。 $x \in X$ の固定化部分群を G_x とかくとき、 $G_{g \cdot x} = gG_xg^{-1}$ であることを示せ。特に $y = g \cdot x$ ならば $G_x \simeq G_y$ (群同型) であることを示せ。

2. $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}^2$ への作用を行列と列ベクトルの積によって定義する。

(i) $\mathbb{R}^2$ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ -軌道分解を記述せよ。特に $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ に推移的に作用することを示せ (ただし $0 \in \mathbb{R}^2$ は零ベクトル)。

(ii) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の固定化部分群 $G_{e_1} = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid ge_1 = e_1\}$ を具体的に決定せよ。

3. $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ とする (複素上半平面)。 $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$g \cdot z := \frac{az + b}{cz + d}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と定める。

(i) $g \cdot z \in \mathbb{H}$ を示し、さらに $(g, z) \mapsto g \cdot z$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の $\mathbb{H}$ への作用を与えていることを示せ。

(ii) $\sqrt{-1} \in \mathbb{H}$ の固定化部分群; $\{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid g \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-1}\}$, は

$$\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

に一致することを示せ。

(iii) 任意の $z = x + iy \in \mathbb{H}$ はある $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ をとって $z = g \cdot \sqrt{-1}$ とかけることを示せ (特に上の作用は推移的である)。

(iv) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2) \simeq \mathbb{H}$ を示せ。

4. n 次直交行列全体のなす群 $\mathrm{O}(n) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tgg = E_n\}$ (E_n は n 次単位行列) は $n-1$ 次元単位球面 $S^{n-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ に、行列 g の列ベクトル ${}^t(x_1, \dots, x_n)$ への積によって作用することを示せ。またこの作用は推移的であることを示せ。

5. $S_n = \{X = {}^tX \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\}$ (n 次実対称行列全体) とする。

(i) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は S_n に $(g, X) \mapsto gXg$ によって作用することを示せ。

(ii) $n = 2$ とする。 S_2 の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ -軌道の代表元全体を具体的に与えよ。

(iii) $n = 2$ とする。次の S_2 の元に関して、同じ $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ -軌道に属するものどうしをまとめて分類せよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

6. $\mathcal{N} = \{X \in M_4(\mathbb{C}) \mid X^4 = 0_4 \text{ (4次零行列)}\}$ とおく。

(i) $G = \text{GL}_4(\mathbb{C})$ は $\mathcal{N}$ に

$$g \cdot X := gXg^{-1}, \quad g \in \text{GL}_4(\mathbb{C}), \quad X \in \mathcal{N}$$

によって作用することを示せ。

(ii) 上の作用に関する $\mathcal{N}$ の $\text{GL}_4(\mathbb{C})$ -軌道全体の代表元全体を具体的に与えよ。

(iii) $(2, 3)$ 成分だけが1であとはすべて0がならぶ $\mathcal{N}$ の元を X_0 とする。 X_0 の固定化部分群 $G_{X_0} < \text{GL}_4(\mathbb{C})$ を決定せよ。

7. $M(2, 3; \mathbb{R})$ を実2行3列行列全体の集合とする。 $G = \text{GL}_2(\mathbb{R}) \times \text{GL}_3(\mathbb{R})$ は $M(2, 3; \mathbb{R})$ に

$$X \mapsto PXQ^{-1}, \quad (P, Q) \in \text{GL}_2(\mathbb{R}) \times \text{GL}_3(\mathbb{R}), \quad X \in M(2, 3; \mathbb{R})$$

で作用する。

(i) この作用による $M(2, 3; \mathbb{R})$ の G -軌道分解の代表元全体を具体的に与えよ。

(ii) $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固定化部分群 $G_{X_0} < G$ を決定せよ。

8. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とし, $\text{GL}(3, \mathbb{C})$ の $V := \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \simeq \mathbb{C}^3$ への作用 (行列の数ベクトルへの掛け算) を考える。

(i) 部分空間 $V_2 = \mathbb{C}e_3$ に対して $P = \{g \in \text{GL}(3, \mathbb{C}) \mid g(V_2) \subset V_2\}$ とすると, P は G の部分群であることをしめせ。さらに P を具体的に決定せよ。

(ii) 部分空間の列 $V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset V_3 = \{0\}$ を考える。ただし $V_1 = \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3$, および $V_2 = \mathbb{C}e_3$ とする。このとき $B = \{g \in \text{GL}(3, \mathbb{C}) \mid g(V_i) \subset V_i, \forall i = 0, 1, 2, 3\}$ とすると, B は G の部分群であることを示せ。さらに B を具体的に決定せよ。

Notation

G の X への作用において X 全体が一つの G -軌道になっているとき, この作用は推移的であるという。