

代数学基礎演習 VI

1. 2つの群準同型 $f: G \rightarrow G'$, $g: G' \rightarrow G''$ の合成 $g \circ f: G \rightarrow G''$ も群準同型であることを示せ。

2. $\det: \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ は全射群準同型であることを示し, さらに同型 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^\times$ が成立することを示せ。

3. (i) 次の $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_7$ に対して, 積 $\sigma_2\sigma_1$ を計算せよ;

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(ii) $\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}$ をそれぞれ求めよ。

(iii) σ_1, σ_2 それぞれを互いに重なりのない巡回置換の積に表せ。

4. G を位数 n の有限群とする。 $x \in G$ に対して $\sigma_x \in \mathfrak{S}(G)$ を $\sigma_x(y) := xy$ で定める。写像 $x \mapsto \sigma_x$ と $\mathfrak{S}(G) \simeq \mathfrak{S}_n$ の合成 $G \hookrightarrow \mathfrak{S}(G) \simeq \mathfrak{S}_n$ は単射な群準同型であることを示せ (特に位数 n の有限群 G は $\mathfrak{S}_n$ の部分群と見なせるということ)。

5. (i) $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して,

$$\sigma(i_1 i_2 \dots i_{l-1} i_l) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \sigma(i_2) \dots \sigma(i_{l-1}) \sigma(i_l))$$

を示せ (特に長さ l の巡回置換の共役は長さ l の巡回置換)。

(ii) $(123 \dots l) = (12)(23)(34) \dots (l-1 l)$ を示せ。

(iii) $s_i := (i \ i+1) \in \mathfrak{S}_n, 1 \leq i \leq n-1$, と書くとき

$$s_i^2 = e, \quad s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \quad \text{および} \quad s_i s_j = s_j s_i \quad (|i-j| > 1 \text{ のとき})$$

を示せ。

6. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 9 & 8 & 11 & 7 & 3 & 2 & 6 & 12 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{12}$ を互いに重なりのない巡回置換の積に書き, さらに σ^{2000} を計算せよ。

7. $n \geq 3$ の時, $\mathfrak{S}_n$ の中心は自明である; $Z(\mathfrak{S}_n) = \{e\}, n \geq 3$, ことを示せ。

8. $\mathfrak{S}_n$ において偶数個の互換の積でかける元のことを偶置換とよび, さらに $\mathfrak{A}_n := \{\mathfrak{S}_n \text{ の偶置換全体} \}$ とおく。

(i) $n = 3$ のとき, $\mathfrak{A}_3$ を具体的に決定せよ。

(ii) 一般の n に対して, $\mathfrak{A}_n$ は位数 $\frac{n!}{2}$ であり, さらに $\mathfrak{S}_n$ の部分群であることを示せ (部分群 $\mathfrak{A}_n < \mathfrak{S}_n$ を n 次交代群とよぶ)。

(iii) $\mathfrak{A}_n < \mathfrak{S}_n$ であることを示せ。

9. 差積多項式

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

において、 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ による座標関数の入れ替え $x_i \mapsto x_{\sigma(i)}$, $1 \leq i \leq n$, を考える。

(i) $\Delta(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \text{sgn}(\sigma) \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を満たす $\text{sgn}(\sigma) \in \{\pm 1\}$ が定まることを示せ。また $\text{sgn} : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}; \sigma \mapsto \text{sgn}(\sigma)$, は全射な群準同型であることを示せ。

(ii) $\ker(\text{sgn}) = \mathfrak{A}_n \triangleleft \mathfrak{S}_n$ を示し、それから群同型 $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n \simeq \{\pm 1\}$ を導け。

10. (i) $\mathfrak{S}_4$ の共役類 ($\mathfrak{S}_4$ -共役類) 分割と類等式をかけ。

(ii) $V = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \triangleleft \mathfrak{S}_4$ を示せ。

(iii) $\mathfrak{S}_4/V$ を具体的に代表元をあげて書き下し、さらに $\mathfrak{S}_4/V \simeq \mathfrak{S}_3$ を示せ。

11. (i) $(12)(34) \in \mathfrak{A}_4 < \mathfrak{S}_4$ の $\mathfrak{S}_4$ における中心化群 $Z_{\mathfrak{S}_4}((12)(34)) < \mathfrak{S}_4$ を求め、さらにそれと同型な群を決定せよ。

(ii) $(12)(34) \in \mathfrak{A}_4$ の $\mathfrak{A}_4$ における中心化群 $Z_{\mathfrak{A}_4}((12)(34)) < \mathfrak{A}_4$ を決定せよ。

12. (i) $\mathfrak{A}_4$ の2元 $(123), (132)$ は $\mathfrak{A}_4$ において互いに共役であるか？

(ii) $\mathfrak{A}_4$ の共役類 ($\mathfrak{A}_4$ -共役類) 分割と類等式をかけ。

(iii) $\mathfrak{A}_4$ のすべての正規部分群を決定せよ。

(iv) $\mathfrak{A}_4$ の部分群 H, K であって、 $H \triangleleft \mathfrak{A}_4$ かつ $K \triangleleft H$ であるが、 K は $\mathfrak{A}_4$ の正規部分群でないものの例をつくれ。