代数学基礎演習 V

1. 群準同型 $\varphi : G \to H$ に対して次が正しければ証明し，誤りならば反例を挙げるか，あるいは正しい命題に修正せよ。

(i) $\varphi(e_G) = e_H$ (e_G, e_H はそれぞれ G, H の単位元)。また $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}, \forall g \in G$。

(ii) $G_0 \subset G$ が G の部分群ならば，$\varphi(G_0) \subset H$ は H の部分群。

(iii) $G_0 \subset G$ が G の正規部分群ならば，$\varphi(G_0) \subset H$ は H の正規部分群。

(iv) $H_0 \subset H$ が H の部分群であれば，$\varphi^{-1}(H_0)$ は G の部分群。

(v) $H_0 \subset H$ が H の正規部分群であれば，$\varphi^{-1}(H_0)$ は G の正規部分群。

(vi) φ の核 $\mathrm{Ker}\ \varphi := \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}$ は G の正規部分群。

(vii) $f, g : G \to H$ を G から H への 2 つの群準同型で $f \neq g$ なるものとする。このとき $G_0 := \{x \in G \mid f(x) = g(x)\}$ は G の部分群である。

2. 全射群準同型 $\varphi : G \to H$ において，G が可換群ならば H も可換群であることを示せ。

3. (i) G, G' はともに有限群で，$\#G$ と $\#G'$ は互いに素とする。このとき G から G' への群準同型 φ は自明なもの $\varphi(g) = e, \forall g \in G,$ しか存在しないことを示せ。

(ii) $\varphi : G \to H$ を群準同型とする。$g \in G$ の位数を n とするとき，$\varphi(g)$ の位数についてはどのようなことがいえるか。

4. (i) アーベル群 G に対して $\varphi_n : G \to G, \varphi_n(g) := g^n,$ は G から G への群の準同型であることを示せ。
(ii) G が位数 15 の巡回群の時，φ_n が同型となる n をすべて求めよ。

5. (i) n 次巡回群 $C_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ を示せ（生成元の行き先について考察せよ)。

(ii) 加法群 $\mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を示せ。

6. ２面体群 $D_3 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = \tau^2 = e,\ \sigma\tau = \tau\sigma^2 \rangle$ に対して $\mathrm{Aut}(D_3)$ を決定せよ (σ, τ の行き先を考察せよ)。

7. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, x \bmod 6 \mapsto (x \bmod 2, x \bmod 3)$ は位数 6 のアーベル群の同型を与えることを示せ（準同型であることと全単射なこと；全単射性は具体的に $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ の各元の像を書き並べてみるとよい。直積群については下記の Notation を参照)。

8. 3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ から $\{\pm 1\}$ への群準同型は 2 つしか存在しないことを示し，さらにそれらを具体的に与えよ。

9. 加法群 $\mathbb{R}$ から乗法群 $\mathbb{C}^\times$ への写像 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times, \varphi(x) = \exp(\sqrt{-1}\ x),$ 群準同型であることを示せ。また $\mathrm{im}\ \varphi$ および $\ker\ \varphi$ をもとめよ。

10. 群準同型 $f : G \to H, g : H \to K$ の合成 $g \circ f : G \to K$ は群準同型であることを示し，また $\ker(g \circ f)$ を適切に表せ。

11. (i) $\mathfrak{S}_4$ の部分集合 $A = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ は $(12)(34)$ を含む $\mathfrak{S}_4$ 共役類であることを示せ。

(ii) $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ に対して $\varphi_\sigma(x) := \sigma x \sigma^{-1}$ とおくと，対応 $\sigma \mapsto \varphi_a$ は全射群準同型 $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}(A) \simeq \mathfrak{S}_3$ を定めることを示せ。

(iii) 上の群準同型の kernel が $V = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ であることを示せ（特に $V \lhd \mathfrak{S}_4$，また $V \lhd \mathfrak{A}_4$ でもある）。

(iv) $\mathfrak{A}_4/V$ はどんな群に同型であるか？($\{e\} \lhd V \lhd \mathfrak{A}_4 \lhd \mathfrak{S}_4$ は 4 次方程式の根の公式の構成において本質的な役割を演じる）

12. (i) 群 G において互いに共役な 2 元の位数は等しいことを示せ。

(ii) 群 G において xy と yx は互いに共役であり，よって位数は等しいことを示せ。

13. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の部分集合 A_1, A_2, A_3, A_4 を

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}^\times,\ a < b \right\}, \quad A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid b > 0 \right\},$$
$$A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^\times \right\}, \quad A_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^\times \right\}$$

と定める。

(i) $A_1 \coprod A_2 \coprod A_3 \coprod A_4$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の共役類の代表元全体の集合を与えることを示せ。
(ii) 各元 $x \in A_i$ $(1 \le i \le 4)$ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ における固定化部分群 $Z(x)$ を求め，$x \in A_1$ ならば $Z(x) \simeq \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times$, $x \in A_2$ ならば $Z(x) \simeq \mathbb{C}^\times$, $x \in A_3$ ならば $Z(x) \simeq \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$, $x \in A_4$ ならば $Z(x) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ をそれぞれ示せ。

14. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について答えよ。

(i) A と B は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ において共役であることを示せ。

(ii) A と B は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ において共役でないことを示せ。

(iii) A と B は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ において共役であることを示せ。

15. 四元数群 $Q = \langle i, j \mid i^4 = e,\ i^2 = j^2,\ ji = i^3 j \rangle$ の共役類分割および類等式を求めよ (III-**11** も参照)。

16. p を素数とする。位数が p^2 の群はアーベル群であることを示せ (IV-**7** をうまく用いよ)。

Notation

群 G_1, G_2 に対して $G_1 \times G_2$ は $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2, y_1 y_2)$ を演算として群になる（これを示せ）。これを群 G_1 と G_2 の直積群とよぶ。