代数学基礎演習 IV

$D_n = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = e,\ \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$ を n 次 2 面体群（正 n 角形の合同変換群）とする。D_n の元は $\{e, \sigma, \sigma^2, \cdots, \sigma^{n-1}, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \cdots, \tau\sigma^{n-1}\}$ で与えられ，特に $\#D_n = 2n$ である。

1. $D_5 = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau\sigma^3, \tau\sigma^4\}$ $(\#D_5 = 10)$ を考える。

(i)　元 $\sigma \in D_5$ の共役類 $C(\sigma) = \{g\sigma g^{-1} \mid g \in D_5\}$ を具体的に決定せよ。

(ii) $\tau \in D_5$ の共役類 $C(\tau)$ を具体的に決定せよ。

(iii) D_5 の互いに異なる共役類を全て決定し，D_5 の共役類分割を与えよ。

(iv) D_5 の類等式を記せ。

2. (i) D_5 の部分群の位数の可能性を全てあげよ (Lagrange)。

一般に群 G の正規部分群は (A) G の共役類の和集合（特にこの和集合には $C(e) = \{e\}$ が含まれていなければならない）であって, かつ (B) それが G の部分群になっているものである。

(ii) D_5 の正規部分群をすべて決定せよ。

(iii) 正規部分群 $H \lhd D_5$ のうち自明でない（つまり $\{e\}$ や D_5 でない）ものについて，D_5 の商群 D_5/H はどんな群に同型であるか決定せよ。

3. 6 次 2 面体群 D_6 $(\#D_6 = 12)$ を考える。

(i) D_6 の相異なる共役類を具体的に全て決定せよ。

(ii) 2 面体群 D_6 の共役類分割を与え，さらに D_6 の類等式を記せ。

4. (i) 6 次 2 面体群 D_6 の正規部分群を全て決定せよ。

(ii) 上で求めた正規部分群 $H \lhd D_6$ のうち自明でないものそれぞれに対して，商群 D_6/H はどんな群に同型であるか，それぞれ決定せよ。

5. つぎの内から実際に、位数 10 の或るどれかの群の類等式として与えられるものをすべて選び，さらにそれぞれに対応する群を具体的に記せ。

(i) $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$　(ii) $1+1+1+2+5$
(iii) $1+2+2+5$　(iv) $1+2+3+4$　(v) $1+1+2+2+2+2$
(vi) $2+2+2+2+2$

6. 共役類を丁度3つもつような有限群をすべて決定せよ（類等式は $\#G = 1 + a + b$（a, b は $\#G$ の約数）の形。両辺を $r = \#G$ で割ってできる $1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ からうまく r, m, n を絞り込め。ここで $r \geq m \geq n$ としても一般性を失わない)。

7. 位数が素数 p のべきである有限群 G, $\#G = p^n$, を p 群とよぶ。p 群 G の中心 $Z(G)$ は $\{e\}$ より真に大きい $(\#Z(G) > 1)$ ことを示せ。

8. $H := \{e, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423)\}$ は D_4 と同型な $\mathfrak{S}_4$ の位数8の部分群であること示せ。(例えば正方形の頂点に1, 4, 2, 3の順に番号をふって，(1423) を σ: $\pi/2$ 回転，(12) を τ: 対称軸に関する折り返し，にそれぞれ対応させると $H \simeq D_4$ が示せる)。

9. (i) 4変数多項式 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ に対して

$$\mathrm{Sym}(f) := \{\sigma \in \mathfrak{S}_4 \mid f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$$

とおく。$\mathrm{Sym}(f)$ は $\mathfrak{S}_4$ の部分群になることを示せ。

(ii) 特に $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ とする。

$$(12),\ (34),\ (12)(34),\ (13)(24),\ \text{また}\ (14)(23) \in \mathrm{Sym}(x_1x_2 + x_3x_4)$$

を確かめよ。

(iii) $H < \mathfrak{S}_4$ を上の **8.** で与えた部分群とする。部分群の包含列:

$$H < \mathrm{Sym}(x_1x_2 + x_3x_4) < \mathfrak{S}_4$$

に Lagrange の定理を適用し，$\#\mathrm{Sym}(x_1x_2 + x_3x_4) = 8$ または 24 であることを示せ。

(iv) $\mathrm{Sym}(x_1x_2 + x_3x_4) = H$ であることを示せ。

10. 群 G から G への群同型全体がなす集合を $\mathrm{Aut}(G)$ とかく。

(i) $\mathrm{Aut}(G)$ は写像の合成により群になることを示せ（G の自己同型群とよぶ)。

(ii) $g \in G$ に対し $f_g : G \to G$ を $x \mapsto f_g(x) := gxg^{-1}$ で定めるとき，$f_g \in \mathrm{Aut}(G)$ を示せ。

(iii) $\mathrm{Inn}(G) := \{f_g \mid g \in G\}$ とおく。$\mathrm{Inn}(G) \triangleleft \mathrm{Aut}(G)$ を示せ ($\mathrm{Inn}(G)$ を G の内部自己同型群とよぶ)。