

代数学基礎演習 III

1. 「 H が G の部分群 $\iff$ 任意の $x, y \in H$ に対して $x^{-1}y \in H$ 」を示せ。
2. G の部分群 $H < G$ および $x \in G$ に対して,

$$xHx^{-1} := \{xhx^{-1} \mid h \in H\}$$

とおく。 xHx^{-1} も G の部分群 (H と共役な部分群という) であることを示せ。

3. H を G の部分群とする。左 H コセットたちによる分割が $G = \coprod_{x \in S} xH$ と与えられるとき, $G = \coprod_{x \in S} Hx^{-1}$ は右 H コセットたちによる G の分割であることを示せ。

4. (i) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b \neq 0 \right\}$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の部分群であることを示せ。

(ii) $H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid b \neq 0 \right\}$ は G の部分群であるが, G の正規部分群ではないことを示せ。

(iii) $H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \triangleleft G$ を示せ。

5. G の正規部分群 H_1, H_2 に対して $H_1 \cap H_2 \triangleleft G$ を示せ。

6. 部分群 $H < G$ の指数 $[G : H] = 2$ ならば, $H \triangleleft G$ であることを示せ ($[G : H] := \#G/\#H$)。

7. G の部分群 H, K に対して, $HK := \{hk \in G \mid h \in H, k \in K\} \subset G$ とおく。

(i) $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$, $K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ とした場合, HK は G の部分群ではないことを示せ。

(ii) H, K の少なくとも一方が G の正規部分群であるならば HK は G の部分群になることを示せ。

8. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det g = 1\} \triangleleft \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ を示せ。剰余群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ はどのような群に同型であるか?

9. アーベル群 G の任意の部分群は G の正規部分群であることを示せ。

10. 群 G に対して, $Z(G) := \{x \in G \mid \forall y \in G \text{ に対して } xy = yx \text{ が成立}\}$ とおく。 $Z(G) \triangleleft G$ を示せ ($Z(G)$ を G の中心 (the center of G) とよぶ)。

11. (i) $i := \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \quad j := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ とおくとき、

$$i^4 = e := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i^2 = j^2 = -e, \quad ji = i^3j$$

が成り立つことを示せ。

(ii) $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ の中で i, j が生成する部分群 Q のすべての元を e, i, j を適当に用いてかけ (この Q を四元数群とよぶ)。 Q はアーベル群であるか?

(iii) Q の中心 $Z(Q)$ を求めよ。 $Q/Z(Q)$ はどんな群に同型であるか?

(iv) Q の部分群をすべて求め、さらにそのすべてが Q の正規部分群であることを確かめよ (全ての部分群が正規部分群でも、その群はアーベル群とは限らない例である)。

12. $x, y \in G$ に対して $xyx^{-1}y^{-1} \in G$ を x, y の交換子とよぶ。また交換子全体が生成する G の部分群を G の交換子群とよんで $[G, G]$ とかく：

$$[G, G] := \langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G \rangle$$

(i) $[G, G]$ の各生成元 $xyx^{-1}y^{-1}$ の $g \in G$ による共役 $g(xyx^{-1}y^{-1})g^{-1}$ について考えることによって、 $[G, G] \triangleleft G$ であることを示せ。

(ii) 剰余群 $G/[G, G]$ はアーベル群であることを示せ。 $G/[G, G]$ を G のアーベル化とよび、 G^{ab} とかく。

13. $\mathfrak{S}_3$ の交換子群 $[\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_3]$ をもとめよ。また $\mathfrak{S}_3^{ab} = \mathfrak{S}_3/[\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_3]$ はどんな群に同型であるか?

14. $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ の部分群 $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}) \right\}$ の交換子群 $[N, N]$

をもとめよ。 N^{ab} はどんな群に同型であるか?

15. 位数 6 の群をすべて決定せよ。ただし互いに同型なものはひとつにまとめて考える (ヒント：まず元の位数となりうる自然数に着目して考えよ)。