

代数学基礎演習 XI

1. 位数 6 の群 G を G の 2-Sylow 部分群, 3-Sylow 部分群に着目して同型を除いて分類せよ。
2. G を群で $\#G = p^2q$ ($p \neq q$ はともに素数) とする。
 - (i) G の p -Sylow 部分群および q -Sylow 部分群のいずれも G の正規部分群でないと仮定する。このとき G の p -Sylow 部分群, q -Sylow 部分群はそれぞれ何個ずつ存在するか。
 - (ii) G の p -Sylow 部分群あるいは q -Sylow 部分群のいずれかは G の正規部分群であることを示せ (Hint: (i) の状況で G の元の個数を数え上げて矛盾を導く)。

〈位数 60 の単純群〉

以下の 3 から 8 において, G は位数 60 の単純群であるとする。

3. G の位数 3, および 5 の元の個数をそれぞれ求めよ。
 G の 2-Sylow 部分群全体の集合を S_2 とする。任意の $S, S' \in S_2$ ($S \neq S'$) に対して以下に答えよ。
 4. $S \cap S' = \{e\}$ あるいは $S \cap S' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のいずれかが成立することを示せ。
 5. $S \cap S' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とするとき, G における $S \cap S'$ の正規化部分群 $N_G(S \cap S')$ の位数はいくつになりうるか, 位数の可能性をしぼり込め。 (Hint: $\#S$ をみると S はアーベル群であることがわかる。よって $S \cap S' < S < N_G(S \cap S')$ で, 特に $\#S \mid \#N_G(S \cap S')$ である。そこでもう少し頑張って次の 6 につなげよ)。
 6. 位数 12 の群の分類を用いて $S \cap S' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とすると矛盾が生じることを示し, 従って $S, S' \in S_2$ ($S \neq S'$) に対して $S \cap S' = \{e\}$ であることを示せ (ヒント: 元の個数の勘定)。
 7. 5 の結果を用いて $\#S_2 = 5$ であることを示せ。 (Note: Sylow の定理より $\#S_2 = 1, 3, 5$, あるいは 15, のいずれかなのはすぐわかる)。
 8. 位数 60 の単純群 G は 5 次交代群 $\mathfrak{A}_5$ に同型であることを示せ。また $\mathfrak{A}_5$ の 2-Sylow 部分群を実際に具体的に挙げよ。

9. (i) アーベル群 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ の元 $(1, 1)$ の位数はいくつか。
 (ii) アーベル群の同型写像 $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ をそれぞれ具体的に構成せよ。
10. アーベル群 $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ の 2 元 $(2, 1)$ と $(3, 4)$ で生成される部分群

$$H = \{a(2, 1) + b(3, 4) \mid a, b \in \mathbb{Z}\} < \mathbb{Z}^2$$

を考える。 $\#(\mathbb{Z}^2/H)$ を求めよ。