

代数学基礎演習 X

1. $H \triangleleft G$ に関して全射な群準同型 $\pi : G \rightarrow G/H$ を考える。

- (i) G/H の部分群 $\overline{K}$ に対して $K = \pi^{-1}(\overline{K})$ は H を含む G の部分群であることを示せ。
 (ii) $\{H$ を含む G の部分群 K 全体 $\}$ と $\{G/H$ の部分群 $\overline{K}$ 全体 $\}$ は 1:1 に対応することを示せ。

2. 以下の数の組 (n, p) に対して、位数 n の群 G 中の p -Sylow 部分群の個数を答えよ (Sylow の定理を用いてしぼり込める個数の可能性をすべて答えよ)。

- (i) $(n, p) = (28, 7)$ (ii) $(n, p) = (48, 2)$ (iii) $(n, p) = (32, 2)$ (iv) $(n, p) = (12, 2)$
 (v) $(n, p) = (12, 3)$

3. 位数 168 の単純群 G は位数 7 の元をいくつ持つか¹。

4. 有限群 G ($p \nmid \#G$ とする) の p -Sylow 部分群 S と G の部分群 H の対に関して以下に答えよ。

- (i) S あるいは H のいずれかが G の正規部分群であるならば $H \cap S$ は H の p -Sylow 部分群であることを示せ。
 (ii) S と H のいずれも G の正規部分群でないときは $H \cap S$ は必ずしも H の p -Sylow 部分群になるとは限らない。実際この反例をつくれ。

5. 有限群 G ($p \nmid \#G$ とする) の p -Sylow 部分群 S と G の部分群 H の対に関して以下に答えよ (この問題の結論 (iii) と上の 4 の結論 (ii) を比較するとよい)。

- (i) H の G/S への作用 $gS \mapsto hgS$ ($h \in H$) において gS の H における固定化部分群 $H_{gS} = \{h \in H \mid hgS = gS\}$ を考える。 $H_{gS} = H \cap gSg^{-1}$ を示せ。
 (ii) $p \nmid \#(G/S)$ であることから、 H -軌道 $O(g_0S) = \{hg_0S \mid h \in H\} \subset G/S$ の位数が p で割れないような元 $g_0S \in G/S$ が少なくとも一つ存在することを示せ。
 (iii) $H/H_{g_0S} \simeq O(g_0S)$ を用いて、 $H_{g_0S} = H \cap g_0Sg_0^{-1}$ は H の p -Sylow 部分群であることを示せ。

6. p を素数とし、 p 次対称群 $\mathfrak{S}_p$ を考える。

- (i) $\sigma^p = e$ を満たす元 $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ 全体の個数を求めよ。
 (ii) $\mathfrak{S}_p$ の p -Sylow 部分群の位数はいくつか。
 (iii) $\mathfrak{S}_p$ の p -Sylow 部分群はいくつあるか。

7. 位数 84 の群 G の 7-Sylow 部分群はかならず G の正規部分群であることをしめせ (特に位数 84 の群は単純群ではあり得ない)。

8. 位数 56 の単純群は存在しないことを示せ (ヒント：単純群だとすると 7-Sylow 部分群は $8 = 7 + 1$ 個ないといけないがこれから矛盾を導く)。

¹心にあるのは、 $G \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ (位数 168 の単純群)。

9. 位数 39 の非アーベル群 G は Sylow 部分群をいくつずつもつか。39 を割る素数ごとに調べよ。

10. 位数 21 の群 G を同型を除いて分類せよ (ヒント: 3-Sylow 群 P と 7-Sylow 群 Q をそれぞれ一つとると両方とも巡回群である: $P = \langle a \mid a^3 = e \rangle$, $Q = \langle b \mid b^7 = e \rangle$. また $Q \triangleleft G$ である。よって $aba^{-1} = b^k$ で、さらに k を適当なものにとれば群 G が出来る。そのような k をすべて求めればよい)。

11. $p < q$ を共に素数とし位数 pq の群 G を考える。

(i) G の q -Sylow 部分群 Q は巡回群で、さらに $Q \triangleleft G$ であることを示せ。

(ii) $p \nmid q-1$ ならば G は位数 pq のアーベル群、実際さらに強く pq 次巡回群と同型であることを示せ (ヒント: $\text{Aut } Q \simeq (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$)

〈位数 12 の群〉

以下の 12 から 16 まですべて位数 12 の群 G は次のいずれかに同型であることを示す:

- (i) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ (ii) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (iii) $\mathfrak{A}_4$ (4 次交代群)
 (iv) $D_6 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathfrak{S}_3$ (6 次二面体群) (v) $\langle a, b \mid a^4 = b^3 = e, aba^{-1} = b^2 \rangle$

12. 位数 12 の群 G の 2-Sylow 部分群、および 3-Sylow 部分群はそれぞれ何個ずつ存在し得るか、個数の可能性をすべてあげよ。また 2-Sylow 部分群 H を同型を除いてすべて分類せよ。

13. G の 2-Sylow 部分群 H と 3-Sylow 部分群 K を一つずつとる。 H か K の少なくとも一方は G の正規部分群であることを示せ。

14. $H \triangleleft G$ かつ $K \triangleleft G$ のとき、

$$G \simeq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \text{ あるいは } G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

であることを示せ。

15. $H \triangleleft G$ であるが、 K は G の正規部分群ではないとき、

$$G \simeq \mathfrak{A}_4 \text{ (4 次交代群)}$$

を示せ。(ヒント: G の 3-Sylow 部分群は互いに G -共役である (Sylow の定理) ことを用いる。また G の 3-Sylow 部分群は 3 次巡回群と同型なので、相異なる 2 つの 3-Sylow 部分群の共通部分は $\{e\}$ であることも注意せよ。)

16. H は G の正規部分群ではないが、 $K \triangleleft G$ のとき、

$$G \simeq D_6, \text{ あるいは } G \simeq \langle a, b \mid a^4 = b^3 = e, aba^{-1} = b^2 \rangle$$

となることを示せ。