代数学基礎演習 I

1. 群 G に対して以下に答えよ。

(i) G の単位元 $e \in G$ はただ一つに定まることを示せ。

(ii) $a \in G$ の逆元 $a^{-1} \in G$ はただ一つに定まることを示せ。

(iii) $a, b \in G$ に対し $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ であることを示せ。

2. G を群とする。

(i) $a, x, y \in G$ に対して $ax = ay$, あるいは $xa = ya$, ならば $x = y$ であることを示せ。

(ii) $a, b \in G$ を固定する。写像 $f : G \to G;\ x \mapsto axb$ は全単射であることを示せ。

3. G の部分集合 H と元 $a \in G$ に対して G の部分集合 aH を

$$aH := \{ah \mid h \in H\}$$

と定める。このとき写像 $H \to aH;\ h \mapsto ah$ は全単射であることを示せ。

4. (i) $\mathfrak{S}(X)$ を集合 X から X 自身への全単射全体のなす集合とする。全単射の合成によって $\mathfrak{S}(X)$ は群になることを示せ。

(ii) G を群とする。$a \in G$ に対して $f_a \in \mathfrak{S}(G)$ を $x \mapsto ax$ で定める。このとき写像 $G \to \mathfrak{S}(G);\ a \mapsto f_a$ は単射な群準同型であることを示せ。

5. 群 G においてすべての元 $a \in G$ が $a^2 = e$ をみたしているとする。このとき G は可換群であることを示せ。

6. 次はそれぞれ群になるか, ならないか。群になる場合は単位元と逆元を記述せよ。ならない場合はその理由を述べよ。

(i) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$: 自然数全体で加法
(ii) $\mathbb{Q}$: 有理数全体で有理数の乗法
(iii) $\mathbb{R}_+$: 正の実数全体に実数の乗法
(iv) $\mathbb{C}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$: 絶対値 1 の複素数全体に複素数の乗法
(v) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$: 絶対値 2 の複素数全体に複素数の乗法
(vi) $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$: 0 以外の整数全体で整数の乗法

7. 群になるかならないか，必要な説明をつけて答えよ。
(i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{R} \right\}$ で行列の積
(ii) $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) := \{\mathrm{n}$ 次可逆実行列全体 $\}$ で行列の積
(iii) $\mathrm{SL_n}(\mathbb{R}) := \{\mathrm{g} \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R}) \mid \det \mathrm{g} = 1\}$ で行列の積
(iv) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}^\times \right\}$ で行列の積
(v) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C}^\times,\ b \in \mathbb{C} \right\}$ で行列の積
(vi) $\{A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det A \neq 0\}$ で行列の積
(vii) $\{A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det A \in \{1, -1\}\}$ で行列の積

8. (i) $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ の 2 元 $x := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と $y := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を適当に繰り返し掛けてできる群 G の位数が 6 であることを確かめよ。

(ii) $x,\, y \in G$ それぞれに 3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ の元を次のように対応させる：

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

これを積に関して拡張して群同型 $G \simeq \mathfrak{S}_3$ を示せ。

9. (i) 複素射影直線 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の一次分数変換

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0$$

の全体は変換の合成により群をなすことをしめせ。
(ii) 次の 6 個の一次分数変換

$$\lambda, \quad 1-\lambda, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{\lambda}{\lambda-1}, \quad \frac{1}{1-\lambda}, \quad \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

は変換の合成によって位数 6 の群 G をなすことを示せ。

(iii) (ii) の群 G は 3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ と同型であることを示せ。

1. 集合 X に対して $\mathfrak{S}(X) := \{X$ から X への全単射全体$\}$ とする。$\mathfrak{S}(X)$ は全単射の合成によって群となる。特に $X = \{1, 2, \ldots, n\}$: n 元集合のとき

$$\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}(\{1, 2, \ldots, n\})$$

を n 次対称群とよぶ。$\mathfrak{S}_n$ の元については次のような記述法を用いる：たとえば $n = 3$ のとき,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12) = \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{cases}$$

(一番右が $\{1, 2, 3\}$ から $\{1, 2, 3\}$ への一つの全単射の普通の書き方, 一番左がそれの $\mathfrak{S}_n$ における記法，さらに真ん中はそれの適切な書き換え)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123) = \begin{cases} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{cases}$$

のように書く。これを用いると

$$\mathfrak{S}_3 = \{e, (12), (23), (13), (123), (132)\}$$

とかけ、例えば $(123) = (12)(23)$ $(132) = (23)(12)$，等である（右が先の約束, 確認せよ）。また $n = 7$ のとき例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} = (31)(6542)(7) = (31)(6542)$$

（ここで $(31) = (13)$ のような元は互換, $(6542) = (5426) = (4265) = (2654)$ のような元は巡回置換と呼ばれる。互換は長さ 2 の巡回置換である。(7)（長さ 1 の巡回置換）は自明として省略する）,　また

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (12743)(56)$$

などのように書け，さらにこのような記述は適切な形で一般化できることが想像できるだろう（証明せよ)。

2. 集合 $M(\neq \emptyset)$ に結合律を満たす演算 μ が定義され、さらにその演算に関して単位元 $e \in M$ が存在するとき，$M^\times$ を M の（μ, e に関する）可逆元全体のなす部分集合とする: $M^\times = \{x \in M \mid x^{-1} \in M\}$, つまり M のなかに μ, e に関する逆元をもつ $x \in M$ 全体の集合。$M^\times$ は μ に関して自然に群となることに注意。例えば，体 K の乗法に関して $K^\times = K \setminus \{0\}$（$\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$）$\mathbb{Z}$ の積に関して $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$，$M_n(\mathbb{R})$ の積に関して $M_n(\mathbb{R})^\times = \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ など。