演習 1

1. $\dfrac{1}{(z-2)^2(z+3)}$ の極をその位数と留数を込めてすべて求めよ。

2. (i) $\dfrac{1}{\sin z}$ の $z=0$ における Laurent 展開を z^5 の項まで求めよ。

Hint: $\sin z = z - z^3/6 + z^5/120 - \cdots = z(1 - z^2/6 + z^4/120 - \cdots)$ より $1/\sin z = \frac{1}{z(1-z^2/6+\cdots)}$ である。ここで適当に幾何級数展開を考えよ。

(ii) $\dfrac{1}{\sin z}$ の極をその位数と留数を込めてすべて求めよ。

Hint: $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $e^{iz} = e^{ix}e^{-y}$, $e^{-iz} = e^{-ix}e^{y}$ であるから $y = \mathrm{Im}\ z \neq 0$ の時 $\sin z$ は 0 にならないことを確かめよ。よって $\sin z$ の零点は実軸上にあるもののみで，それらはよく知っている。よって $1/\sin z$ の極がわかる。$\sin z = (-1)^n \sin(z+\pi n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ を適当に利用して，留数も $z=0$ での留数に関係づけると良い。

3. (i) $1 - 2z\cos\theta + z^2$ を z の 1 次式の積に分解せよ。

(ii) $\dfrac{1}{1-2z\cos\theta+z^2}$ を $z=0$ において級数展開せよ。またその収束半径を求めよ。

4. $K(k) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$ を考える。

(i) $K(k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta d\theta\right) k^{2n}$ ($k=0$ における級数展開) を示せ。またその収束半径を求めよ。

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$ を示し，

$$\begin{aligned} K(k) &= \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((2n)!)^2}{(2^n n!)^4}k^{2n} \\ &= \frac{\pi}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right) \end{aligned}$$

を示せ。