

演習 4

1. $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ を複素上半平面とする。 $f(z, x) = e^{\pi i x^2 z}$, $(z, x) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}$, に対して

$$\widehat{f}(z, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi x} f(z, x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

を考える。

(i) 右辺の積分は z について $\mathbb{H}$ において広義一様収束することを示せ (したがって z について $\mathbb{H}$ で正則な関数を定める, cf. G. Shimura, Elementary Dirichlet series and modular forms, Theorem A1.4)。

(ii) $\widehat{f}(z, \xi) = (-iz)^{-1/2} e^{-\pi i \xi^2 / z}$ を示せ。ただし $(-iz)^{1/2}$ は $z = iy$ ($y > 0$) の時 $\sqrt{y}$ に等しいようにとるものとする (特別に $\widehat{f}(iy, \xi)$ ($y > 0$) の値を求め, それから上の等式をしかるべき議論によって導けば良い)。