

課題 II

提出課題は 1 と 2. $\Omega \subset \mathbb{C}$ は開集合とする。

1. $f: \Omega$ で有理型, C を Ω 内の単純閉曲線でかつ Ω 内で 1 点に可縮なもの, f は C 上 0 にならないとする。 N, P をそれぞれ C の内側にある f の零点あるいは極の個数 (位数を含めて数える) とする時,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

を示せ。

2. $z^7 + 5z^3 + z^2 - 1 = 0$ は領域 (i) $|z| < 1$ また (ii) $1 < |z| < 2$ においてそれぞれいくつずつ根をもつか。理由も含めて個数を答えよ。

3. n 次方程式 $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0$) は $R > 0$ が十分大きいとき $\{|z| < R\}$ 内に, 従って $\mathbb{C}$ 内に, n 個の根をもつことを, $a_n z^n$ と $a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ に Rouché の定理を適用することによって示せ。