

演習 1

1. $\frac{1}{(z-2)^2(z+3)}$ の極をその位数と留数を込めてすべて求めよ。

2. (i) $\frac{1}{\sin z}$ の $z=0$ における Laurent 展開を z^5 の項まで求めよ。

Hint: $\sin z = z - z^3/6 + z^5/120 - \dots = z(1 - z^2/6 + z^4/120 - \dots)$ より $1/\sin z = \frac{1}{z(1 - z^2/6 + \dots)}$ である。ここで適当に幾何級数展開を考えよ。

(ii) $\frac{1}{\sin z}$ の極をその位数と留数を込めてすべて求めよ。

Hint: $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $e^{iz} = e^{ix}e^{-y}$, $e^{-iz} = e^{-ix}e^y$ であるから $y = \operatorname{Im} z \neq 0$ の時 $\sin z$ は 0 にならないことを確かめよ。よって $\sin z$ の零点は実軸上にあるもののみで、それらはよく知っている。よって $1/\sin z$ の極がわかる。 $\sin z = (-1)^n \sin(z + \pi n)$ ($n \in \mathbb{Z}$) を適当に利用して、留数も $z=0$ での留数に関係づけると良い。

3. $f(z)$ は全平面 $\mathbb{C}$ で正則かつ有界であるとする。このとき任意の $a \neq b$ かつ $|a|, |b| < R$ に対して

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz$$

を計算して $f(a) = f(b)$, よって $f(z)$ は定数関数であることを示せ (つまり Liouville の定理)。[野村, 例題 8.46], [Titchmarsh, p.85, 2.51]

4. A, N を正定数とする。全平面 $\mathbb{C}$ で正則な関数 $f(z)$ がすべての $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$|f(z)| < A(1 + |z|)^N$$

を満たすならば $f(z)$ は多項式関数であることを示せ。[野村, 問題 8.47], [Titchmarsh, p.87, 2.54]