課題 IX

以下 $\Delta = \{|z| < 1\}$ を単位円板とする。

I. $|a| < 1, |b| < 1$ とする。単位円板 Δ から Δ への一次分数変換 $z \mapsto w = w(z)$ で $w(a) = b$ をみたすものは

$$\frac{w-b}{1-\overline{b}w} = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

によって与えられることを示せ。またこのとき $w'(a) = e^{i\theta}\dfrac{1-|b|^2}{1-|a|^2}$ であることを示せ。

II. (i) $u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で調和であることを示せ。

(ii) $\mathbb{C}$ から 0 以下の実軸を抜いた領域で正則な $f(z)$ で $\mathrm{Re}\ f = u$ を満たすものをすべて求めよ。

(iii) $\mathrm{Re}\ h = x^2 - y^2$ を満たす $\mathbb{C}$ 全体で正則な $h(z)$ をすべて求めよ。

III. $SU(1,1) := \left\{ A \in SL_2(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ とするとき次に答えよ。

(i) $A \in SU(1,1)$ は $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$, $|a|^2 - |b|^2 = 1$ であることと同値なこと，すなわち

$$SU(1,1) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \mid \det A = 1 \right\}$$

であることを示せ。

(ii) $\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} = \overline{a}\begin{pmatrix} a/\overline{a} & b/\overline{a} \\ \overline{b}/\overline{a} & 1 \end{pmatrix} = \overline{a}\begin{pmatrix} a/\overline{a} & (a/\overline{a})(b/a) \\ \overline{b}/\overline{a} & 1 \end{pmatrix}$ に注意して

$$\mathrm{Aut}\ \Delta \simeq SU(1,1)/\{\pm 1_2\}$$

を示せ。