

課題 VIII

I. 以下, $\log w$ の値は w の偏角は $-\pi$ と $+\pi$ の間にあるとして, 特に $w > 0$ ならば $\log w$ は実数であるように, 定めるものとする。

(i) $-\log(1-z)$ の $z=0$ における級数展開とその収束円を決定せよ。

(ii) $0 < \theta < 2\pi$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\log \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) + i \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right)$$

であることを示せ。

II. $\widehat{\mathbb{C}}$ の相異なる 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 に対して $[z_1, z_2, z_3, z_4] := \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}$ と定める。

(i) 任意の相異なる $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ および $f \in \text{Aut } \widehat{\mathbb{C}}$ に対して

$$[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

を示せ。

(ii) “ z_1, z_2, z_3, z_4 は同一円周上にあるかまたは同一直線上にある” ことと “ $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$ ” は同値であることを示せ。

III. 単位円板 $\Delta = \{|z| < 1\}$ から Δ への一次分数変換 φ で

$$\varphi \left(\frac{i}{2} \right) = 0, \quad \arg \varphi' \left(\frac{i}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

をみたすものを求めよ。