課題 V

I. γ を単純閉曲線，$f(z)$ は γ とその内部 $D(= D^\circ)$ を含む領域 $\widetilde{D}$ でいくつかの極のみを許し，それら極以外では一価正則とする。

(i) $a \in D$ に対して $\mathrm{Res}_{z=a}\dfrac{f'(z)}{f(z)}dz = \mathrm{ord}(f,a)$ を示せ。

(ii) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ の値を $N_D(f,0)$ および $N_D(f,\infty)$ を使って解釈せよ。ただし $N_D(f,b) := \#\{z \in D \mid f(z) = b\}$ (重複を込めて数える)。

II. γ を単純閉曲線，$f(z)$ は γ とその内部 $D(= D^\circ)$ を含む領域 $\widetilde{D}$ で正則とする。また $f : \widetilde{D} \to f(\widetilde{D})$ は全単射であるとし，その逆写像を f^{-1} とする。このとき $q \in f(D)$ に対して

$$f^{-1}(q) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \quad z \cdot \frac{f'(z)}{f(z) - q}dz$$

であることを示せ。

III. $z^7 + 5z^3 + z^2 - 1 = 0$ は領域 (i) $|z| < 1$ また (ii) $1 < |z| < 2$ においてそれぞれいくつづつ根をもつか。理由も込めて個数を答えよ。