

課題 IV

1. $f(z)$ は全平面 $\mathbb{C}$ で正則かつ有界であるとする。このとき $a \neq b$ かつ $|a|, |b| < R$ に対して

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz$$

を計算して $f(a) = f(b)$, よって $f(z)$ は定数関数である (Liouville の定理) ことを示せ。

2. $\mathbb{C}$ から $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ への正則な全単射は存在しないことを示せ。

3. A, N を正定数とする。全平面で正則な関数 $f(z)$ がすべての $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$|f(z)| < A(1 + |z|)^N$$

を満たすならば $f(z)$ は多項式関数であることを示せ。