

課題 XII

I. $\Delta = \{|z| < 1\}$ における正則関数 f であつて, $\mathbb{R} \cap \Delta = \{-1 < x < 1\}$ に制限すると

$$f(x) = |x|^5 \quad (-1 < x < 1)$$

をみたすものは存在するか? 存在するならば具体的に f を与え, 存在しないならば存在しない理由を述べよ。

II. $\sin(\pi/z)$ は有界領域 $|z-1| < 1$ において正則でかつ加算無限個の零点をもつがもちろん恒等的に 0 ではない。ぼんやりした人はこれを零点の孤立性や一致の定理の内容に反するように受け取るかもしれない。実際そういう人がいたら誤解する気持ちを汲みつつ, しかしきちんと理解してもらえるように, 定理の内容と対照して上の事実を適切に説明せよ。

III. $|z| < 1$ で正則な 0 を中心とするべき級数関数

$$f(z; 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-1)^n z^n$$

を考える。 $|z-1| = 1$ の上半分の半円 C に沿って中心を 0 から 2 までうごかしてできる $f(z; 0)$ の解析接続を $f_C(z; 2)$ とする。一方で $|z-1| = 1$ の下半分 C' に沿って中心を 0 から 2 までうごかしてできる $f(z; 0)$ の解析接続を $f_{C'}(z; 2)$ とするとき, $f_C(z; 2)$, $f_{C'}(z; 2)$ の収束円をそれぞれ決定し, さらに

$$f_{C'}(z; 2) = -f_C(z; 2)$$

のように見えることを説明せよ。