課題 XI

I. $\Delta = \{|z| < 1\}$ を単位円板とする。

(i) $\zeta \in \Delta$ に対して

$$g(z, \zeta) := \log \left| \frac{1 - \overline{\zeta} z}{z - \zeta} \right|, \quad z \in \Delta$$

とする。$g(z, \zeta)$ は ζ で発散する Δ の Green 関数であることを示せ。

(ii) $z = \rho e^{i\theta} \in \Delta$ とするとき

$$-\frac{\partial g}{\partial \rho}|_{\rho=1} = P(e^{i\theta}, \zeta)\text{：}\Delta \text{ の Poisson 核}$$

であり，したがって Δ 上の調和関数 u（$\overline{\Delta}$ で連続）に対して

$$u(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) \frac{\partial g}{\partial \rho}(e^{i\theta}, \zeta) d\theta$$

特に

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial \rho}(e^{i\theta}, \zeta) d\theta = 1$$

であることを示せ。

(iii) $\partial^2 g(z, \zeta)/\partial \overline{z} \partial \zeta$ は $\overline{z}$ および ζ についてそれぞれ正則であることを示せ。

(iv) 領域 D から Δ への正則同型 f が与えられたとき，$z_0 \in D$ で発散する D の Green 関数をつくれ。