

課題 X

以下 $\Delta = \{|z| < 1\}$ を単位円板とする。

I. (i) Δ の Poisson 核 $P(e^{i\theta}, re^{i\xi}) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\xi-\theta)+r^2}$ ($e^{i\theta} \in \partial\Delta$, $re^{i\xi} \in \Delta$) に関して

$$P(e^{i\theta}, re^{i\xi}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r^{|m|} e^{im(\xi-\theta)}$$

を示せ。

(ii) 上の展開を利用して

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}, re^{i\xi}) d\theta = 1$$

を示せ。

II. $z \in \Delta$ を固定する。 $e^{i\theta^*} = \frac{z - e^{i\theta}}{1 - \bar{z}e^{i\theta}}$ で定まる対応 $\partial\Delta \leftrightarrow \partial\Delta$ ($e^{i\theta} \leftrightarrow e^{i\theta^*}$) を考える。

(i) 上の対応において $e^{i\theta^*}$ は $e^{i\theta}$ と z を結ぶ直線上, z を間にはさんだ $e^{i\theta}$ の反対側にあることを示せ (図もかけ)。

(ii) $\frac{d\theta^*}{d\theta}$ (実数値関数であることに注意せよ) を直接計算して求めよ。また単位円周の Poisson 積分は

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) d\theta^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta^*}) d\theta$$

とかけることを示せ。