

演習 3

I. (i) $D = \{x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ とするとき

$$\iint_D xy^3 dx dy$$

の値を計算せよ。

(ii) 次の積分の値を求めよ：

$$\iint_{1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \text{ かつ } 0 \leq y \leq x} x dx dy$$

(iii) 次の積分の値を求めよ：

$$\iint_{x^2 + y^2 < 1 \text{ かつ } x > 0 \text{ かつ } y > 0} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$$

II. (i) 極座標変換を利用して等式

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} f'(x^2 + y^2) dx dy = \pi(f(a^2) - f(0))$$

を示せ。ただし $f'(t) = \frac{df}{dt}(t)$ である。

(ii) 積分

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}}$$

の値を計算せよ。

III. $D = \{x^2 < y < 2x^2 \text{ かつ } y^2 < x < 3y^2\}$ に対して

$$\iint_D dx dy \quad (D \text{ の面積})$$

の値を求めよ。

IV. (i) 変数変換 $x = u^2, y = v/u$ に関して $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を計算せよ。

(ii) 積分

$$\iint_{1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1} \frac{dx dy}{(1+x)(1+xy^2)}$$

の値を求めよ。

I. (i) 極座標変換すると

$$\begin{aligned} & \iint_{0 < r < 2, 0 < \theta < \pi/2} r \cos \theta \cdot r^3 \sin^3 \theta \cdot r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin^3 \theta d\theta \int_0^2 r^5 dr \end{aligned}$$

三角関数の積分は

$$\begin{aligned} \cos \theta \sin^3 \theta &= \cos \theta \sin \theta \cdot \sin^2 \theta = \frac{\sin 2\theta}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= \frac{1}{4} (\sin 2\theta - \sin 2\theta \cos 2\theta) = \frac{1}{4} \sin 2\theta - \frac{1}{8} \sin 4\theta \end{aligned}$$

としても計算できる。もちろん $(\sin^4 \theta)' = 4 \sin^3 \theta \cos \theta$ を利用してもよい。

(ii) は極座標変換すると積分領域は $1 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi/4$ となることに注意。

II. (i) は素直に極座標変換して考えてみる。

(ii) も極座標変換して計算してみよ。

$$\iint_{0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi} \frac{r dr d\theta}{\sqrt{1 - r^4}} = 2\pi \int_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{1 - r^4}} = 2\pi \cdot \left[\frac{1}{2} \arcsin(r^2) \right]_0^1.$$

ここで合成関数の微分法により、 $\frac{d}{dr} \arcsin(r^2) = \frac{2r}{\sqrt{1 - (r^2)^2}}$ に注意。

III. D の定義に注目して $u = y/(x^2), v = x/(y^2)$ と変数変換して考えると $D = D_{x,y}$ は $D_{u,v} = \{1 < u < 2 \text{ かつ } 1 < v < 3\}$ に対応する。 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{3u^2v^2}$ となる。 $\iint_D dx dy = 1/9$.

IV. (i) $\det \begin{pmatrix} 2u & -v/(u^2) \\ 0 & 1/u \end{pmatrix} = 2.$

(ii) u, v 積分に変数変換すると

$$\begin{aligned} & \iint_{0 \leq v \leq u, 1 \leq u \leq \sqrt{3}} \frac{2du dv}{(1+u^2)(1+v^2)} = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_0^u \frac{dv}{1+v^2} \right) \frac{du}{1+u^2} \\ & = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \arctan u \cdot \frac{du}{1+u^2} = 2 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \theta d\theta = \frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{16} \end{aligned}$$