

演習 9

I. $x^2 + 3y^2 = 12$ をみたしながら (x, y) がうごくとき、 $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - y^3 + 6y^2$ の極値をもとめよ。

I. $\varphi(x, y) = x^2 + 3y^2 - 12$ とする。Lagrange の未定乗数 λ を用いた連立方程式

$$\text{grad} f(x, y) = \lambda \cdot \text{grad} \varphi(x, y)$$

$$\varphi(x, y) = 0$$

は今の場合、

$$x^2 = 2\lambda x, \quad -3y^2 + 12y = 6\lambda y, \quad x^2 + 3y^2 = 12$$

はじめの 2 式から

$$x = 0 \text{ または } 2\lambda$$

$$y = 0 \text{ または } 4 - 2\lambda$$

$(x, y) = (0, 4 - 2\lambda)$ を 3 式に入れると $3(4 - 2\lambda)^2 = 12$ より $\lambda = 1, 3$. よって $(x, y) = (0, -2)$ または $(0, 2)$

$(x, y) = (2\lambda, 0)$ を 3 式に入れると、 $\lambda = \pm\sqrt{3}$. したがって $(x, y) = (\pm 2\sqrt{3}, 0)$.

$(x, y) = (2\lambda, 4 - 2\lambda)$ を 3 式に入れると、 $\lambda = \frac{3}{2}$. よって $(x, y) = (3, 1)$ ができる。

さて極大、小の判定について考えよう。この問題は、わざとこの判定の部分はずいぶん細かくやらなければいけない(なんというか、“フル装備”のケース)ように設定してあるので、以下は適当に理解しておけばよい。対象となる各点において $f(x, y(x))$ や $f(x(y), y)$ の、基本的には 2 次、必要なら高次の微分を調べて、それをテイラー展開の式と合わせることで関数のふるまいを判定すればよいという感覚がわかっていればよい。

まず $\varphi(x, y) = x^2 + 3y^2 - 12 = 0$ の陰関数 $y = y(x)$ について、 $2x + 6yy' = 0$ より $y' = -\frac{x}{3y}$ である。

一方 $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$ では陰関数 $y = y(x)$ はとれないので $x = x(y)$ をかんがえると $2xx' + 6y = 0$ より $x' = -\frac{3y}{x}$.

さて、 $y \neq 0$ のとき $y = y(x)$ をとってやると

$$\begin{aligned} f'(x, y(x)) &= x^2 - 3y^2 y' + 12yy' \\ &= x^2 - 3y^2 \left(\frac{-x}{3y} \right) + 12y \left(\frac{-x}{3y} \right) \\ &= x^2 + xy - 4x \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} f''(x, y(x)) &= (x^2 + xy - 4x)' \\ &= 2x + y + xy' - 4 \\ &= 2x + y - \frac{x^2}{3y} - 4 \end{aligned}$$

である。これに $(x, y) = (0, \pm 2)$ を代入するとともに負なので $(0, \pm 2)$ では極大となる。 $f(0, 2) = -8 + 24 = 16$, $f(0, -2) = 8 + 24 = 32$ 。 $(x, y) = (3, 1)$ を代入すれば $f''(3, 1) = 0$ である。よってこの場合はさらに 3 次微分を調べてみると、 $f'''(x, y(x)) = 2 + y' - \frac{6xy - 3x^2 y'}{9y^2} = 2 - \frac{x}{3y} - \frac{6xy + (x^3/y)}{9y^2}$ より $f'''(3, 1) = 2 (\neq 0)$ であって、

$$\begin{aligned} &f(x, y(x)) \\ &= f(3, 1) + f'(3, 1)(x - 3) + \frac{f''(3, 1)}{2}(x - 3)^2 + \frac{f'''(3, 1)}{6}(x - 3)^3 + \dots \\ &= f(3, 1) + \frac{2}{6}(x - 3)^3 + \dots \end{aligned}$$

であるから、 $x = 3$ ($y = 1$) のまわりでは符号変化が起こるので、 $(x, y) = (3, 1)$ は極大でも極小でもない (変曲点)。

$(x, y) = (\pm 2\sqrt{3}, 0)$ は $f''(x, y(x))$ には代入できない (分母 0 の項がある)。よってこれに対しては陰関数 $x = x(y)$, $\varphi(x(y), y) = 0$ を利用することを考える。このとき同様に $f''(x(y), y)$ を計算して $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$ を代入すると $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$ では極小で値はそれぞれ $\pm 8\sqrt{3}$ であることがわかる。実際、計算してみると

$$\begin{aligned} f'(x(y), y) &= x^2 \frac{dx}{dy} - 3y^2 + 12y \\ &= -3yx - 3y^2 + 12y \\ f''(x(y), y) &= -3y \frac{dx}{dy} - 3x - 6y + 12 \\ &= \frac{3y^2}{x} - 3x - 6y + 12 \end{aligned}$$

より

$$f''(\pm 2\sqrt{3}, 0) = \mp 6\sqrt{3} + 12 > 0$$

よって $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$ では極小。