

演習 8

I. (i) $F(x, y) = x^2 + \sin(xy) - 1 = 0$ に対して $0 = y(1)$ となる陰関数 $y = y(x)$ が存在することを示せ。

(ii) (i) の陰関数 $y = y(x)$ に対して $y'(1)$, $y''(1)$ を計算せよ。

II. 曲線 $x^2y^3 - 3x^2 = x^3y - 3$ の点 $(1, -1)$ における接線の方程式を求めよ。

III. 曲面 $x^2 - 4xyz - 5yz^3 = 0$ の点 $(5, 1, 1)$ における接平面の方程式を求めよ。

I. $x^2 + \sin(xy) - 1 = 0$ の両辺を微分すれば、

$$2x + \cos(xy)(y + xy') = 0.$$

($y = y(x)$ に注意。) よって $x = 1$ で $y(1) = 0$ だから $2 + y'(1) = 0$ より $y'(1) = -2$.

上で求めた式 $2x + y \cos(xy) + xy' \cos(xy) = 0$ の両辺をもう一回微分すれば、

$$2 + y' \cos(xy) - y \sin(xy)(y + xy') + y' \cos(xy) + xy'' \cos(xy) - xy' \sin(xy)(y + xy') = 0$$

である。 $x = 1$ で $y(1) = 0$, $y'(1) = -2$ (上で求めた) だから、

$$2 + (-2) + 0 + (-2) + y''(1) - 0 = 0$$

より $y''(1) = 2$.

II. 例えば、陰関数の定理より曲線の方程式は $y = y(x)$ の形にかけることが保証されるわけである。このときの $(1, -1)$ における接線の方程式は $y = -1 + y'(1)(x - 1)$ として求められると考えればよい。 $y'(1)$ の計算はいつも通り。

III. これまでの講義では 2 変数関数 $\varphi(x, y) = 0$ の陰関数定理をやったが、 $\varphi(x, y, z) = 0$ に関しても $\varphi(x, y, z(x, y)) = 0$ をみたす陰関数 $z = z(x, y)$

がとれる（もちろん微分の条件のもとで、教科書参照）。したがって曲面の方程式は $z = z(x, y)$ という形で理解できるとしてよい。あとはこの曲面の接平面の方程式の計算をすればよい（前回の演習 II で 1 次の係数を計算すればよい）。

$$z = 1 + \frac{\partial z}{\partial x}(5, 1)(x - 5) + \frac{\partial z}{\partial y}(5, 1)(y - 1)$$

でそれぞれの微分 $\frac{\partial z}{\partial x}(5, 1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(5, 1)$ を計算せよ。