# 演習 7

**I.** $f(x,y)=(1/\sqrt{y})e^{-x^2/4y}$ とするとき、$f_y$, $f_{xx}$ を計算し、$f_y=f_{xx}$ が成立していることをしめせ。

**II.** 曲面 $z=f(x,y)=x^2+\sin xy$ 上の点 $(1,0,1)$ における接平面の方程式を求めよ。ただし $z=f(x,y)$ のグラフの点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面とは、式 $z=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$（つまり右辺は $f(x,y)$ の点 $(a,b)$ における 1 次近似の 1 次までの部分）で定まる平面のことである。

**III.** $z=f(x,y)=x^y$ のグラフの点 $(x,y,f(x,y))=(1,4,1)$ および $(4,2,16)$ の各々における接平面の方程式を求めよ。

**IV.** $2x=u^2-v^2$, $y=uv$ と変数変換するとき、$f(u,v)=f(u(x,y),v(x,y))$ に対して

$$f_{xx}+f_{yy},$$

を $u$, $v$, $f_{uu}$, $f_{vv}$ を使って書き表わせ。答えは $\frac{1}{u^2+v^2}(f_{uu}+f_{vv})$ となる.

**V.** $C^2$ 級関数 $f(x,y)$ が $f_{yy}=4f_{xx}$ を満たすとする。$u=x-2y$, $v=x+2y$ と変数変換するとき、$f(u,v)$ の満たす微分方程式が $f_{uv}=0$ で与えられることを示せ。

**VI.** (i) $f(x,y)$ が原点からの距離 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ のみによる関数であるとする, すなわち $f(x,y)=h(r)=h(\sqrt{x^2+y^2})$. このとき

$$f_{xx}+f_{yy}$$

を $h'(r)=\frac{dh}{dr}(r)$, $h''(r)$ をもちいて $r$ の式であらわせ。

(ii) (i) を利用して

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

を計算せよ。

---

**IV.** $f_x=f_u u_x+f_v v_x$ であるので、$u_x$, $v_x$ がわかればよい。

ここで $2x = u^2 - v^2$ および $y = uv$ の両辺を $x$ で微分すると

$$2 = 2uu_x - 2vv_x, \quad 0 = u_x v + uv_x$$

つまり

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \frac{1}{2(u^2+v^2)} \begin{pmatrix} u & 2v \\ -v & 2u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

として $u_x$, $v_x$ がもとまる。

また $f_y = f_u u_y + f_v v_y$ であるから $u_y$, $v_y$ をもとめたいがこれも $2x = u^2 - v^2$ および $y = uv$ の両辺を $y$ で微分することにより

$$0 = 2uu_y - 2vv_y, \quad 1 = u_y v + uv_y$$

を解いて、もとめることができる。以下、$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} f_x$ などを上の結果をもとに計算してみればよい。