

演習 6

I. $f(x, y) = x^2 + \sin(xy)$ 上の $(x, y) = (1, 0)$ における 1 次近似を求めよ。

II. $f(x, y) = e^x \cos y$ に対して、 $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$,
 $f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ を計算せよ。特に $f_{xy} = f_{yx}$ となっていることを確認せよ。

III. (i) $f(x, y) = x^2 y$ に対して $\frac{df}{dt}(\cos t, \sin t)$ を計算せよ。

(ii) $f(x, y)$ が $f_x = 3y^2 + 6$, $f_y = 6xy$ を満たすとき $\frac{d}{dt} f(t^2, t)$ を計算せよ。

IV. $f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ に対して $f_{xx} + f_{yy}$ を計算せよ。

V. $x = u^2 - v^2$, $y = uv$ と変数変換するとき、

(i) $f(x, y) = \sin^2(xy)$ に対して $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ を計算せよ。

(ii) u, v の関数 $g(u, v)$ を上の変数の対応で x, y の関数と考えるとき、 $\frac{\partial g}{\partial x}$,
 $\frac{\partial g}{\partial y}$ を $\frac{\partial g}{\partial u}$, $\frac{\partial g}{\partial v}$ をつかって表せ。