演習 5

I. (i) $\log(x+\sqrt{x^2+1})$ を x で微分せよ。

(ii) (i) の両辺を $x=0$ で展開した級数表示をもとめ、それを利用して $\log(x+\sqrt{x^2+1})$ の $x=0$ での Taylor 展開をもとめよ。

(iii) $y=f(x)=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ の逆函数 $x=f^{-1}(y)$ ($f^{-1}(0)=0$) の $y=0$ での展開を

$$f^{-1}(y)=c_1y+c_2y^2+c_3y^3+\cdots$$

とするとき、(ii) で求めた $f(x)$ の $x=0$ での展開と $y=f(f^{-1}(y))$ を利用（両辺の係数比較の方法）して、係数 $c_1, c_2, c_3, \cdots$ を順に求めよ。

II. $x=\arctan(y)$ を $y=\tan x$ の逆関数とする ($\arctan 0=0$)。

(i) $\dfrac{d}{dy}\arctan(y)$ を計算して y の式で表せ。

(ii) (i) の結果を $y=0$ で Taylor 展開し、それを積分して $\arctan(y)$ の $y=0$ での展開を求めよ。

(iii) (ii) を利用して

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots$$

を導け。

I. (i) 合成関数の微分法により $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-1/2}$.

(ii) $(1+x^2)^{-1/2}$ に 2 項展開をつかう：

$$(1+x^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n}.$$

両辺積分して

$$\log(x+\sqrt{1+x^2})=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{6}+\cdots.$$

(iii)

$$y = (c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + \cdots) - \frac{1}{6}(c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + \cdots)^3 + \cdots$$

II. (i) $\dfrac{d}{dy}\arctan(y) = \cos^2 x$ で $1 + y^2 = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ を用いればＯＫ.

(ii) $\dfrac{1}{1+y^2}$ の 2 項展開の積分。

(iii) $\arctan 1 = ?$