# 演習 4

**I.** 次の極限値をそれぞれ計算せよ。

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{2+x}{2-x}}{x-\sin x}\quad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1+x^2}{2x^4}.$$

**II.** 次の関数の $x=0$ での Taylor 展開について、はじめの数項を決定せよ。

(i) $\dfrac{1}{\cos x}$　　(ii) $\dfrac{x}{\sin x}$　　(iii) $e^{1-\cos x}$　　(ii) $e^{-2x/(1-x)}$

**III.** (i) $7^{\frac{1}{3}}$ の小数近似を求めよ。

(ii) $\sin\frac{1}{10}$ の小数近似を計算せよ。

**IV.** (i) $f(x)=\sqrt{1+\sin x}$ を $x=0$ において展開するとき、

$$\sqrt{1+\sin x}=\sqrt{1+x-\frac{x^3}{3!}+\cdots}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots$$

係数 $c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3$ を求めよ。

(ii) $\sqrt{\cos x}$ を $x=0$ で展開せよ。

**V.** $\frac{z}{e^z-1}$ の $z$ に関するべき級数展開

$$\frac{z}{e^z-1}=1+c_1z+c_2z^2+\cdots$$

を次のようにして計算せよ。

$$z=(e^z-1)(1+c_1z+c_2z^2+\cdots)=(z+z^2/2+\cdots)(1+c_1z+c_2z^2+\cdots)$$

に注意して、右辺を展開してそれから両辺を比較して $c_1,\ c_2,\ldots,c_6$ くらいまでもとめよ。

---

**II.** $\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{1-x^2/2+x^4/24-\cdots}$ に幾何級数展開を組合わせる。
$\frac{x}{\sin x}=\frac{x}{x-x^3/6+x^5/120-\cdots}=\frac{1}{1-x^2/6+x^4/120-\cdots}$ に幾何級数展開を組合わせる。
$e^{1-\cos x}=e^{x^2/2-x^4/24+\cdots}$ に指数関数の展開を組合わせる。

$e^{-2x/(1-x)} = e^{-2x(1+x+x^2+x^3+\cdots)} = e^{-2x-2x^2-2x^3-\cdots}$ に指数関数の展開を組み合わせる。

**III.** (i) $7^{\frac{1}{3}} = (8-1)^{\frac{1}{3}} = 2(1-\frac{1}{8})^{\frac{1}{3}}$ で 2 項展開を考える：

$$
\begin{aligned}
7^{\frac{1}{3}} &= 2\cdot\left(1-\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= 2\cdot\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{8}\right)+\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{-2}{3}}{2!}\left(\frac{-1}{8}\right)^2+\cdots\right)
\end{aligned}
$$

頑張って 4 次の項まで和を計算してみると、

$$
\begin{aligned}
&2\left(1+\frac{-1}{3\cdot 8}+\frac{1\cdot -2}{2\cdot 3^2\cdot 8^2}+\frac{1\cdot -2\cdot -5\cdot -1}{6\cdot 3^3\cdot 8^3}+\frac{1\cdot -2\cdot -5\cdot -8}{24\cdot 3^4\cdot 8^4}\right) \\
=&2\cdot\left(\frac{3^5\cdot 8^4-3^4\cdot 8^3-3^3\cdot 8^2-5\cdot 3\cdot 8-10}{3^5\cdot 8^4}\right) \\
=&2\cdot\frac{951998}{995328}=\frac{951998}{497664}=1.9129332\cdots,
\end{aligned}
$$

$N$ 次 Taylor 近似の誤差

$$
R_N(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \frac{1}{N!}\int_0^x (x-t)^N f^{(N+1)}(t)dt
$$

の評価を $f(x) = (1+x)^{1/3}$ に対してやってみると

$$
\begin{aligned}
R_N(-1/8) &\le \frac{1}{(N+1)!}\left(\frac{1}{8}\right)^{N+1}\max_{-\frac{1}{8}\le t\le 0}\left|\frac{d^{N+1}}{dt^{N+1}}(1+t)^{1/3}\right| \\
&\le \frac{1}{(N+1)!}\left(\frac{1}{8}\right)^{N+1}\left|\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-5}{3}\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-N\right)\right|\left(\frac{8}{7}\right)^{N+1-\frac{1}{3}} \\
&\le \frac{1}{(N+1)!}\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdots(3N-1)}{3^{N+1}7^{N+1}}
\end{aligned}
$$

これに $N=4$ などをいれれば $7^{\frac{1}{3}} = 2(1-\frac{1}{3})^{1/3}$ の誤差評価について

$$
2\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}{5!\cdot 3^5\cdot 7^5} = \frac{44}{3^6\cdot 7^5} \le \frac{45}{3^6\cdot 7^5} \le \frac{1}{3^4\cdot 7^4} = \frac{1}{194481} = 0.0000051\cdots
$$

(ii) 5 次近似の誤差の評価は

$$
\left|\int_0^x \frac{d^6\sin t}{dt^6}\cdot\frac{(x-t)^5}{5!}dt\right| \le \int_0^x |\sin t|\frac{(x-t)^5}{5!}dt
$$

で $0 < t < x = \frac{1}{10}$ で $|\sin t| \le t \le x = \frac{1}{10}$ より、

$$\int_0^{\frac{1}{10}} |\sin t| \cdot \frac{(\frac{1}{10} - t)^5}{5!} dt \le \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6!} \frac{1}{10^6} \le 10^{-9}$$

となることに注意。より大雑把には $\sin t$ の（高次）微分は $\pm \sin t, \pm \cos t$ でその最大値は 1 でおさえられるが，それを使って評価すると，$\frac{1}{10}$ が 1 となる分，上で考えたより確実に 1 桁損する。まあ全く評価ができないよりは，十分ましではあるが。

　また上の誤差積分はもう一度部分積分すれば，$\sin x$ の $x = 0$ における展開に関しては $x^6$ の項は 0 なので，

$$|5\text{ 次近似の誤差}| \le \int_0^{\frac{1}{10}} |\cos t| \frac{(\frac{1}{10} - t)^6}{6!} dt \le \frac{1}{7!} \frac{1}{10^7} \quad (|\cos t| \le 1)$$

のように評価してもよい.

**IV, V** は級数の合成、係数比較の方法を利用して計算せよ。