

演習 3

I. 極限值

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{-x}$$

を計算したい。

(i) $\log(1+x)$ を x のべき級数としてあらわせ。

(ii) (i) を用いて $\frac{\log(1+x)}{-x}$ をあらわす x のべき級数をもとめて、 $x \rightarrow 0$ での極限を計算せよ。

II. 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - (a_0 + a_1x + a_2x^2)}{x^3}$ が 0 でない実数となるために必要な、実定数 a_0, a_1, a_2 を決定せよ。またそのときの極限値を求めよ。

III. $e^{\frac{1}{10}}$ の小数近似を Taylor 近似

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

を利用して求める ($x = \frac{1}{10}$ とせよ)。誤差の評価を与えながら、 $n = 5, 7$ 次までの和を計算せよ。

IV. $f(x) = \sin^2 x$ の $x = 0$ における展開を x^6 の項までもとめよ。

V. 次の極限値をそれぞれ計算せよ。

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \log(1+x)}{\sin x - x} \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}.$$

I. $\log(1-x), \log(1+x)$ の x に関するべき級数はそれぞれ、 $\frac{1}{1-x}, \frac{1}{1+x}$ の幾何級数展開を積分してつくれるのだった。分子を展開してしまえば、比の極限はすぐわかる。

II. 考え方は I の (ii) とおんなじ。分母が x^3 だから分子のほうも x の 2 次以下の部分がちょうど打ち消しあって 3 次の項から始まるように a_0, a_1, a_2 を決めれば OK .

III. 例えば5次まで計算したときの誤差は, $0 < t < \frac{1}{10}$ において $e^t \leq e^{\frac{1}{10}} < 2$ であることを用いれば,

$$\int_0^{\frac{1}{10}} e^t \frac{(\frac{1}{10} - t)^5}{5!} dt \leq 2 \frac{1}{6!} \frac{1}{10^6} = \frac{1}{360} \frac{1}{10^6} \leq 10^{-8}$$

など.

IV. ひとつの考え方: $\sin^2 x = (\sin x)^2 = (x - \frac{x^3}{3!} + \dots)^2$ と考えて、展開するのがよい。Taylor の公式にあわせて微分を計算していてもよいけれども、この平方の展開のほうが計算を間違にくい(各自、微分して計算したものと比較してみよ)。

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \right) \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{120} + \frac{1}{36} \right) x^6 + \dots \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45} x^6 + \dots \end{aligned}$$

展開するときに x^6 の係数を拾い忘れないように、気をつけよう。

もうひとつの考え方: $1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ だから $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ として、 $\cos 2x$ を展開してみればよい。結果はもちろん上と同じになる。

V. ロピタルの定理を利用してもよいが、分母分子それぞれ $x = 0$ で展開して、比の極限を計算するように考える練習をすること。

$$\begin{aligned} \sin^2 x - x^2 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots \right)^2 - x^2 \\ &= \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \dots \right) - x^2 = -\frac{x^4}{3} + 6 \text{ 次以上} \\ \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} &= \frac{x^4}{24} + 6 \text{ 次以上} \end{aligned}$$

より

$$\frac{\sin^2 x - x^2}{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}} = \frac{-\frac{x^4}{3} + 6 \text{ 次以上}}{\frac{x^4}{24} + 6 \text{ 次以上}} = \frac{-\frac{1}{3} + 2 \text{ 次以上}}{\frac{1}{24} + 2 \text{ 次以上}} \rightarrow \frac{-\frac{1}{3} + 0}{\frac{1}{24} + 0} = -8 \quad (x \rightarrow 0)$$