

演習 2

I. (i) $\frac{1}{3-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とかくとき a_n を求めよ。

(ii) $\frac{1}{3-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-2)^n$ とかくとき b_n を求めよ。

II. (i) $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ とかくとき c_n を求めよ。

(ii) $\frac{1-x}{1-x-2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ とかくとき d_n を求めよ。

III. (i) $\frac{x}{\log(1+x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とかくとき a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ。

(ii) $\frac{\log(1+x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ とかくとき b_0, b_1, b_2, b_3 を求めよ。

IV. 次の極限值を求めよ。ただし $n = 1, 2, 3, \dots$ とする。

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \log x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x^n}}$ (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x}$ (iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^n}$

V. $\mathbb{R}$ 上の関数を $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$, $x \neq 1$, および $f(1) = 1$ と定める。これについて

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x), \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$$

をそれぞれ求めよ。 $f(x)$ が連続でないのはどこか？ただし $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは、

(1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が実数として存在し、かつ

(2) その極限値が $f(a)$ ($f(x)$ の $x = a$ での値) に等しい；

が共に満たされること、つまり $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ が満たされること、である。上でみつけた連続でない点それぞれにおいて、この条件 (1), (2) のどれが満たされていないか、述べよ。

I. (i) $\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{2}{3}x}$ として幾何級数展開する。

(ii) $\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{-1-2(x-2)} = -\frac{1}{1+2(x-2)}$ として幾何級数展開する。

II. (i) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ の両辺を 1 回微分する。

(ii) $\frac{1-x}{1-x-2x^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-2x}$ と部分分数分解してそれぞれを幾何級数展開してたず ($1-x-2x^2 = (1+x)(1-2x)$)。答えは

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n + (-1)^n 2}{3} \right) x^n$$

(余談) いわゆるフィボナッチ数列 $\{a_n\}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$; を係数とする級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \cdots$$

を考えると、漸化式を用いて $f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = x$ であることがわかる。つまり $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ 。よって (ii) のように部分分数分解と幾何級数展開を考えると、有名な公式

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

をえる。

III. (i) $\frac{x}{\log(1+x)} = \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots}$ 。これに幾何級数展開を組み合わ

せて考えるとよい。

(ii) $\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \right) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)$ この積を展開して頭から求めていけばよい。

IV. いわゆる”不定形” ; (i) ” $0 \cdot (-\infty)$ ” (ii) ” $\frac{\infty}{\infty}$ ” (iii) ” $\frac{\infty}{\infty}$ ”。しかしたとえばロピタルの定理などうまくつかうと

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \log x = 0$ (「 $\log x$ の $x \rightarrow 0$ での発散」は、どんな $\frac{1}{x^n}$ の発散にくらべても「遅い」)

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$ (「 e^x の $x \rightarrow \infty$ での増大」はどんな多項式よりも「速い」、非常に速く増大する)

(iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^n} = 0$ (「 $\log x$ の $x \rightarrow \infty$ での増大」はどんな多項式よりも「遅い」)

であることがわかる。