

演習 I

I. (i) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots$ の値を求めよ。

(ii) $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^{n-1}} + \cdots$ の値を求めよ。

II. 幾何級数展開を応用して、つぎの関数を x の無限べき級数で表示せよ。

$$(i) \quad \frac{1}{1+x} \quad (ii) \quad \frac{1}{1-x^2} \quad (iii) \quad \frac{1}{3+x^2}$$

III. $h > 0$ を 1 つとる。このとき $|x| < \frac{1}{1+h}$ を満たす全ての x に対して、

$$\left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| < \frac{1}{h(1+nh)}$$

(ただし $n = 1, 2, \dots$ は自然数) をしめせ。

IV. (i) つぎを示せ。

$$\begin{aligned} -\log(1-x) &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots, \\ \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots. \end{aligned}$$

(ii) $\log \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right)$ を示し、 $x = \frac{1}{5}$ を代入して

$$\log \frac{3}{2}$$

の小数近似値を手動で求めよ。

(iii) $\log \frac{3}{2} + \log 2 = \log 3$ に注意して、 $\log 2 = 0.6931471 \dots$ 、および (ii) で求めた値を利用して、 $\log 3$ の小数近似値を手計算で求めよ。

V. $0 < c < 1$ に対して数列 $a_n = c^n$ を考える。 $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$ を次のようにして証明してみよ。

(i) すべての $n \geq 1$ に対して、 $0 < c^{n+1} < c^n < 1$ を示せ。

(ii) 条件より $c = \frac{1}{1+h}$ ($h > 0$) とかけることを用いて、 $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$ を証明せよ。

I. (ii) 幾何級数展開 $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$ の両辺を x で微分してみる。

II. (i) $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$. $z = -x$ と思ってしまふ。

(ii) $z = x^2$ と思ってしまふ。あるいは $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right)$ と部分分数に分けてそれぞれ展開して足しても同じになるはず。

(iii) $\frac{1}{3+x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{3}}$.

III. $y = 1-x$ のグラフをみると $|x| < \frac{1}{1+h}$ のとき、 $|1-x| > \frac{h}{1+h}$ 、つまり $\left| \frac{1}{1-x} \right| < \frac{h+1}{h}$ がわかる。よって $|x| < \frac{1}{1+h}$ のとき、

$$\left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| = \left| \frac{1}{1-x} \right| |x|^{n+1} < \frac{1+h}{h} \frac{1}{(1+h)^{n+1}} = \frac{1}{h} \frac{1}{(1+h)^n}.$$

ここで $h > 0$ より 2 項展開を使うと $(1+h)^n = 1 + nh + {}_nC_2 h^2 + \cdots + {}_nC_n h^n > 1 + nh (> 0)$ だから、

$$\frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{1+nh}.$$

これを上に組み合わせて示せた。

IV. (i) 幾何級数展開の両辺を積分するとでる。

(ii) $2 \left(x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} \right)$ くらいまで、がんばって計算してみる。誤差の評価もやってみよう。

(iii) $\log 3 = 1.098612 \cdots$.

V. (i) $c^{n+1} - c^n = c^n(c-1)$ に $0 < c < 1$ を使えば、右辺つまり左辺が負。

(ii) **III** のように考えて、

$$0 < c^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{1+nh} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$