log 2 の小数近似値および誤差の計算

等式

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}dt$$

および

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}dt$$

を利用して，$\log 2$ の小数近似値を求めよ。

たとえば上の 2 つの等式において，$n=7$ まで考えると $\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} = \frac{2}{1-t^2}$ より（あるいは $n=6$ まで考えると $\frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t} = \frac{2t}{1-t^2}$ より），

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7}\right] + 2\int_0^x \frac{t^8}{1-t^2}dt$$

が得られる。ここで $x = \frac{1}{3}$ を代入すると，

$$\log 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}\frac{1}{3^7}\right] + 2\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^8}{1-t^2}dt$$

である。1 次までの和 $\frac{2}{3} = 0.666\cdots$，3 次までの和 $\frac{56}{81} = 0.69135\cdots$，5 次までの和 $\frac{842}{1215} = 0.69300\cdots$，であり 7 次までの和を求めると、

$$\frac{159168}{229635} = 0.693134\cdots$$

という値を得る。

次にこの 7 次までの和の値がどこまで信頼できるのか，誤差を評価してみよう。実際 $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$ のとき，分母だけなるべく小さくとってみると

$$\frac{t^8}{1-t^2} \leq \frac{t^8}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8}\cdot t^8$$

であるから，

$$2\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{t^8}{1-t^2}dt \leq \frac{9}{4}\int_0^{\frac{1}{3}} t^8 dt = \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9} = \frac{1}{4\cdot 3^9} \leq \frac{1}{3^{10}} \leq 0.000020$$

が得られる。従って上の 7 次までの和から得られた近似値は 0.693134 ± 0.000020 を考えれば，少なくとも 0.6931 までは正しい。

L. Euler はこのようにして $\log 1$, $\log 2$, $\log 3$, $\log 4$, $\log 5$, $\log 6$, $\log 7$, $\log 8$, $\log 9$, $\log 10$ まで近似値を計算した。$x = \frac{1}{5}$ で $\log \frac{6}{4}$, $x = \frac{1}{7}$ で $\log \frac{4}{3}$, $x = \frac{1}{9}$ で $\log \frac{5}{4}$, がそれぞれ計算でき，さらに

$$\log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} = \log 2, \quad \log \frac{3}{2} + \log 2 = \log 3, \quad 2 \log 2 = \log 4,$$
$$\log \frac{5}{4} + \log 4 = \log 5, \cdots$$

とやっていく。Euler の計算によれば

$$\log 2 = 0.69314\ 71805\ 59945\ 30941\ 72321$$
$$\log 3 = 1.09861\ 22886\ 68109\ 69139\ 52452$$

などなど。L. Euler, *Introductio in Analysin Infinitorum*, Tomus Primus, 1748 (Leonhardi Euleri Opera Omnia, Series Prima VIII, p.128, §123). 邦訳：レオンハルト・オイラー，オイラーの無限解析，高瀬正仁訳，海鳴社 2001, pp.104–106

(http://eulerarchive.maa.org もみよ)