

演習 I

I. (i) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots$ の値を求めよ。

(ii) $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^{n-1}} + \cdots$ の値を求めよ。

II. 幾何級数展開を応用して次の関数を x の無限級数で表示せよ。

$$(i) \quad \frac{1}{1+x} \quad (ii) \quad \frac{1}{1-x^2} \quad (iii) \quad \frac{1}{3+x^2}$$

III. $h > 0$ を 1 つとる。このとき $|x| < \frac{1}{1+h}$ を満たす全ての x に対して

$$\left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| < \frac{1}{h(1+nh)}$$

(ただし $n = 1, 2, 3, \dots$ は自然数) をしめせ。

IV. (i) $|x| < 1$ のとき

$$\begin{aligned} -\log(1-x) &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots, \\ \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots \end{aligned}$$

および

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \right)$$

を確認し、さらに $x = \frac{1}{5}$ を代入して $\log \frac{3}{2}$ の小数近似値を求めよ。

(ii) $\log \frac{3}{2} + \log 2 = \log 3$ に注意して、 $\log 2 = 0.6931471 \dots$ 、および (i) で求めた値を利用して、 $\log 3$ の小数近似値を手計算で求めよ。

V. $0 < c < 1$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$ を次のようにして証明してみよ。

(i) すべての $n \geq 1$ に対して $0 < c^{n+1} < c^n < 1$ を示せ。

(ii) $0 < c < 1$ より $c = \frac{1}{1+h}$ ($h > 0$) とかけることを用いて $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$ を証明せよ。

I. (i) 値は $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ である。

(ii) 幾何級数展開 $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots = \frac{1}{1-x}$ の両辺を x で微分してみる。値は $\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = \frac{9}{4}$ である。

II. (i) $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+\cdots$ ($z=-x$ とみて幾何級数展開を利用する。)

(ii) $z=x^2$ とみる。あるいは $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$ と部分分数に分けてそれぞれの項を展開してから和をとっても結果は同じになる。

(iii) $\frac{1}{3+x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3} + \left(-\frac{x^2}{3}\right)^2 - \cdots\right)$ 。

III. $y=1-x$ のグラフをみれば $|x| < \frac{1}{1+h}$ のとき $|1-x| > \frac{h}{1+h}$,

つまり $\left|\frac{1}{1-x}\right| < \frac{h+1}{h}$ がわかる。よって $|x| < \frac{1}{1+h}$ のとき

$$\left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| = \left|\frac{1}{1-x}\right| |x|^{n+1} < \frac{1+h}{h} \frac{1}{(1+h)^{n+1}} = \frac{1}{h} \frac{1}{(1+h)^n}.$$

ここで $h > 0$ より 2 項展開を使うと

$$(1+h)^n = 1 + nh + {}_nC_2 h^2 + \cdots + {}_nC_n h^n > 1 + nh (> 0)$$

だから

$$\frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{1+nh}$$

がわかり、これを先の不等式に組みこめばよい。

IV. (i) 幾何級数展開の両辺を積分するとでる。また $2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5}\right)$ くらいまでがんばって計算してみる。誤差の評価もやってみよう。

(iii) $\log 3 = 1.098612 \cdots$ 。

V. (i) $c^{n+1} - c^n = c^n(c-1)$ に $0 < c < 1$ を使えば、右辺つまり左辺が負。

(ii) III のように考えて、

$$0 < c^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{1+nh} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$