演習９

I. (i) $F(x,y) = x^2 + \sin(xy) - 1 = 0$ に対して $0 = y(1)$ となる陰関数 $y = y(x)$ が存在することを示せ。

(ii) (i) の陰関数 $y = y(x)$ に対して $y'(1)$, $y''(1)$ を計算せよ。

II. 方程式 $\varphi(x,y) = x^3 - 2xy + y^3 = 0$ は $(x,y) = (1,1)$ の近くで陰関数 $y = y(x)$ $(y(1) = 1)$ を唯一つ定めることを示せ．さらに $y'(1)$, $y''(1)$ の値を求めよ．

III. 曲線 $x^2y^3 - 3x^2 = x^3y - 3$ の点 $(1,-1)$ における接線の方程式を求めよ。

IV. 曲面 $x^2 - 4xyz - 5yz^3 = 0$ の点 $(5,1,1)$ における接平面の方程式を求めよ。

I. $x^2 + \sin(xy) - 1 = 0$ の両辺を微分すれば、

$$2x + \cos(xy)(y + xy') = 0.$$

$(y = y(x)$ に注意。$)$　よって $x = 1$ で $y(1) = 0$ だから $2 + y'(1) = 0$ より $y'(1) = -2$.

　上で求めた式 $2x + y\cos(xy) + xy'\cos(xy) = 0$ の両辺をもう一回微分すれば、

$$2+y'\cos(xy)-y\sin(xy)(y+xy')+y'\cos(xy)+xy''\cos(xy)-xy'\sin(xy)(y+xy') = 0$$

である。$x = 1$ で $y(1) = 0$, $y'(1) = -2$ (上で求めた) だから、

$$2 + (-2) + 0 + (-2) + y''(1) - 0 = 0$$

より $y''(1) = 2$.

III. 例えば、陰関数の定理より曲線の方程式は $y = y(x)$ の形にかけることが保証されるわけである。このときの $(1,-1)$ における接線の方程式は $y = -1 + y'(1)(x-1)$ として求められると考えればよい。$y'(1)$ の計算はいつも通り。

IV. 講義では２変数関数 $\varphi(x,y)=0$ の陰関数定理をやったが、$\varphi(x,y,z)=0$ に関しても $\varphi(x,y,z(x,y))=0$ をみたす陰関数 $z=z(x,y)$ がとれる（もちろん微分の条件のもとで、教科書参照）。したがって曲面の方程式は $z=z(x,y)$ という形で理解でき，あとはこの曲面の接平面を求めればよい。

$$z=1+\frac{\partial z}{\partial x}(5,1)(x-5)+\frac{\partial z}{\partial y}(5,1)(y-1)$$

でそれぞれの微分 $\frac{\partial z}{\partial x}(5,1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(5,1)$ を計算せよ。