演習８

I. (i) 曲面 $z = f(x, y) = x^2 + \sin xy$ 上の点 $(1, 0, 1)$ における接平面の方程式を求めよ。ただし $z = f(x, y)$ のグラフの点 $(a, b, f(a, b))$ における接平面とは、式 $z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$ （右辺は $f(x, y)$ の点 (a, b) における 1 次近似）で定まる xyz 空間内の平面のことである。

(ii) $z = f(x, y) = x^y$ のグラフの点 $(x, y, f(x, y)) = (1, 4, 1)$ および $(4, 2, 16)$ の各々における接平面の方程式を求めよ。

II. (i) $f(x, y) = x^2 y$ に対して $\dfrac{d}{dt} f(\cos t, \sin t)$ を計算せよ.

(ii) $f(x, y)$ が $f_x = 3y^2 + 6$, $f_y = 6xy$ をみたすとき $\dfrac{d}{dt} f(t^2, t)$ を計算せよ.

III. $x = u^2 - v^2$, $y = uv$ と変数変換するとき $f(x, y) = \sin^2(xy)$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial u}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ をそれぞれ計算せよ.

IV. $2x = u^2 - v^2$, $y = uv$ と変数変換するとき、$g(u, v)$ を $g(u(x, y), v(x, y))$ によって x, y の関数と考える。

(i) $g_x = \dfrac{\partial g}{\partial x}$, $g_y = \dfrac{\partial g}{\partial y}$, を $g_u = \dfrac{\partial g}{\partial u}$, $g_v = \dfrac{\partial g}{\partial u}$ をつかってあらわせ。

(ii) $g_{xx} + g_{yy}$ を u, v, g_{uu}, g_{vv} を使って書き表わせ。

V. C^2 級関数 $f(x, y)$ が $f_{yy} = 4 f_{xx}$ を満たすとする。$u = x - 2y$, $v = x + 2y$ と変数変換するとき、$f(u, v)$ の満たす微分方程式が $f_{uv} = 0$ で与えられることを示せ。

VI. (i) $f(x, y)$ が原点からの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ のみによる関数であるとする, すなわち $f(x, y) = h(r) = h(\sqrt{x^2 + y^2})$. このとき

$$f_{xx} + f_{yy}$$

を $h'(r) = \frac{dh}{dr}(r)$, $h''(r)$ をもちいて r の式であらわせ。

(ii) (i) を利用して

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

を計算せよ。

IV. $g_x = g_u u_x + g_v v_x$ であるので、u_x, v_x がわかればよい。
ここで $2x = u^2 - v^2$ および $y = uv$ の両辺を x で微分すると

$$2 = 2uu_x - 2vv_x, \quad 0 = u_x v + uv_x$$

つまり

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \frac{1}{2(u^2+v^2)} \begin{pmatrix} u & 2v \\ -v & 2u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

として u_x, v_x がもとまる。
また $g_y = g_u u_y + g_v v_y$ であるから u_y, v_y をもとめたいがこれも $2x = u^2 - v^2$ および $y = uv$ の両辺を y で微分することにより

$$0 = 2uu_y - 2vv_y, \quad 1 = u_y v + uv_y$$

を解いて、もとめることができる。以下、$g_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} g_x$ などを上の注意をもとにさらに計算してみればよい。$g_{xx} + g_{yy} = \frac{1}{u^2+v^2}(g_{uu} + g_{vv})$ となる.