

## 演習 6

I.  $f(x), g(x)$  の  $x = a$  における一次近似式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x-a), \quad g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \varepsilon_2(x-a)$$

(ただし  $x \rightarrow a$  のとき  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ ) をもちいて、積  $f(x)g(x)$  の  $x = a$  における 1 次近似を求め、それから積の微分の公式

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

を導け。

II.  $y = f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$  の逆関数  $f^{-1}(y)$  ( $f^{-1}(0) = 0$ ) の  $y = 0$  での展開を

$$f^{-1}(y) = c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + \cdots$$

とすると、 $f(x)$  の  $x = 0$  での展開と  $y = f(f^{-1}(y))$  を利用して、展開の係数  $c_1, c_2, c_3, \dots$  を順に求めよ。

III.  $y = f(x) = x^4 - 2x + 1$  ( $f(0) = 1$ ) の逆関数  $f^{-1}(y)$  ( $f^{-1}(1) = 0$ ) の  $y = 1$  における展開の始めの数項を求めよ。

IV.  $y = xe^{-x}$  の逆関数  $g(y)$  の  $y = 0$  での展開

$$g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} y^n, \quad c_0 = 0, \quad c_1 = 1$$

を考える。

(i) 逆関数の微分を計算して  $(1-x)\frac{dg}{dy}(y) = \frac{x}{y}$  を示せ。

(ii) (i) の両辺に  $x = g(y)$  の展開式を代入し、 $c_0 = 0, c_1 = 1$  としたとき  $c_2, c_3, c_4$  を求めよ。

---

II.  $\frac{d}{dx} \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  であった。これから、右辺を 2 項展開し、さらに両辺を積分すれば

$$\begin{aligned} \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \binom{-1/2}{n} x^{2n+1} \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots \end{aligned}$$

であった。よって

$$y = (c_1y + c_2y^2 + c_3y^3 + \cdots) - \frac{1}{6}(c_1y + c_2y^2 + c_3y^3 + \cdots)^3 + \frac{3}{40}(c_1y + c_2y^2 + c_3y^3 + \cdots)^5 + \cdots$$

より両辺の係数を比較すると

$$1 = c_1, \quad 0 = c_2, \quad 0 = c_3 - \frac{c_1^3}{6}, \quad 0 = c_4 - \frac{c_1^2 c_2}{2}$$

より  $c_1 = 1, c_2 = c_4 = 0, c_3 = \frac{1}{6}$ 。ここで  $c_2 = c_4 = 0$  としてしまって、上を簡略化すると

$$y = (c_1y + c_3y^3 + c_5y^5 + \cdots) - \frac{1}{6}(c_1y + c_3y^3 + c_5y^5 + \cdots)^3 + \frac{3}{40}(c_1y + c_3y^3 + c_5y^5 + \cdots)^5 \cdots$$

これより

$$0 = c_5 - \frac{c_1^2 c_3}{2} + \frac{3c_1}{40}$$

で

$$c_5 = -\frac{3}{40} + \frac{1}{12} = \frac{1}{120}$$

と計算できる。実はこの場合、逆関数は具体的に

$$f^{-1}(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

であることがわかる ( $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$  を代入して値が  $x$  になることを確かめよ)。特に  $e^y$  と  $e^{-y}$  の  $y = 0$  展開を用いれば、これの  $y = 0$  の展開はすぐ計算できて、上のものと一致していることが確認できる。

IV. (i)  $\frac{dg}{dy}(y) = \frac{1}{(xe^{-x})'} = \frac{1}{e^{-x} - xe^{-x}}$  (分母に積の微分)  $= \frac{1}{(1-x)e^{-x}}$  より、整理すれば ( $y = xe^{-x}$  なのだから)、もとめる微分方程式が得られる。

(ii)  $x = g(y)$  を両辺に単純に代入：

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - \left( y + \frac{c_2}{2}y^2 + \frac{c_3}{6}y^3 + \cdots \right) \right\} \cdot \left\{ 1 + c_2y + \frac{c_3}{2}y^2 + \cdots \right\} \quad (\text{左辺}) \\ &= \frac{y + \frac{c_2}{2}y^2 + \frac{c_3}{6}y^3 + \cdots}{y} = 1 + \frac{c_2}{2}y + \frac{c_3}{6}y^2 + \cdots \quad (\text{右辺}) \end{aligned}$$

左辺の積を展開して、右辺に等しくなるように、はじめのほうから順繰りに  $c_2, c_3$  を決定してゆけばよい。