

演習 5

I. $\sqrt{1 + \sin x}$ を $x = 0$ において展開せよ (始めの 0 でない 3, 4 項を求めよ)。

II. $\frac{z}{e^z - 1}$ の z に関するべき級数展開

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

を次のようにして計算せよ。

$$z = (e^z - 1)(1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots) = (z + z^2/2 + \cdots)(1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots)$$

に注意して、右辺を展開してそれから両辺を比較して $c_1, c_2, \dots, c_6$ くらいまでもとめよ。

III. $\arctan y$ を $y = \tan x$ の逆関数とする ($\arctan 0 = 0, -\frac{\pi}{2} \leq \arctan y \leq \frac{\pi}{2}$)。

(i) $\frac{d}{dy} \arctan y$ を計算して y の式で表せ。

(ii) (i) の結果を $y = 0$ で Taylor 展開し、さらにそれを積分して $\arctan y$ の $y = 0$ での展開を求めよ。

(iii) (ii) を利用して

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots$$

を導け。

IV. (i) $\frac{\sin x}{x}$ の $x = 0$ における n 次 Taylor 近似を、誤差項も適当に表示して求めよ。

(ii) (i) で求めた近似式を利用して積分

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

の近似値を求めよ。誤差も評価すること。

I. $\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots\right)^{\frac{1}{2}}$ に 2 項展開を組み合わせればよい。

II. $z = z + \left(c_1 + \frac{1}{2}\right)z^2 + \left(c_2 + \frac{c_1}{2} + \frac{1}{6}\right)z^3 + \dots$ と右辺を次数ごとにまとめてみると、この恒等式が成立することから

$$c_1 + \frac{1}{2} = 0, \quad c_2 + \frac{c_1}{2} + \frac{1}{6} = 0, \dots$$

となり $c_1, c_2, c_3, \dots$ が ” 順番に ” 求まってゆく。

III. (i) $\frac{d}{dy} \arctan(y) = \cos^2 x$ で $1 + y^2 = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ を用いれば OK.

(ii) $\frac{1}{1+y^2}$ の 2 項展開の積分。

(iii) $\arctan 1 = ?$

IV. (i) $\sin x$ の近似を考えて x で割ってみればよい。例えば、

$$1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{\cos c}{7!}x^6 \quad (c \text{ は } 0 \text{ と } x \text{ の間})$$

誤差項の表示は

$$f(z) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (c \text{ は } a \text{ と } x \text{ の間})$$

を使ってみた。

(ii) (i) の近似式を積分。誤差評価は $|\cos c| \leq 1$ より

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7!} \int_{-1}^1 x^6 dx = \frac{1}{7!} \cdot \frac{1}{7}$$

などにとれる。