演習4

I. $\sin^2 x$ の $x=0$ における展開を x^6 の項までもとめよ。

II. 次の極限値をそれぞれ計算せよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}$　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\log(1+x)}{\sin x - x}$　(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \frac{2+x}{2-x}}{x-\sin x}$　(v) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1+x^2}{2x^4}$.

III. 次の関数の $x = 0$ での Taylor 展開について、はじめの数項を決定せよ。

(i) $\dfrac{1}{\cos x}$　(ii) $\dfrac{x}{\sin x}$　(iii) $e^{1-\cos x}$　(ii) $e^{-2x/(1-x)}$

IV. $7^{\frac{1}{3}}$ の小数近似を求めよ。

V. $e^{\frac{1}{10}}$ の小数近似を Taylor 近似

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x e^t\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

を利用して求める ($x = \dfrac{1}{10}$ とせよ)。誤差の評価を与えながら、$n = 5, 7$ 次までの和を計算せよ。

I. ひとつの考え方：$\sin^2 x = (\sin x)^2 = (x - \frac{x^3}{3!} + \cdots)^2$ と考えて、展開するのがよい。Taylor の公式にあわせて微分を計算していってもよいけれども、この平方の展開のほうが計算を間違にくい (各自、微分して計算したものと比較してみよ)。

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots\right)\\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{120} + \frac{1}{36}\right)x^6 + \cdots\\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + \cdots\end{aligned}$$

展開するときに x^6 の係数を拾い忘れないように、気をつけよう。

もうひとつの考え方：$1-2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ だから $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ として、$\cos 2x$ を展開してみればよい。結果はもちろん上と同じになる。

II. ロピタルの定理を利用してもよいが、分母分子それぞれ $x=0$ で展開して、比の極限を計算するように考える練習をすること。

$$\begin{aligned}\sin^2 x - x^2 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots\right)^2 - x^2 \\ &= \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \cdots\right) - x^2 = -\frac{x^4}{3} + 6\,\text{次以上} \\ \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} &= \frac{x^4}{24} + 6\,\text{次以上}\end{aligned}$$

より

$$\frac{\sin^2 x - x^2}{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}} = \frac{-\frac{x^4}{3} + 6\,\text{次以上}}{\frac{x^4}{24} + 6\,\text{次以上}} = \frac{-\frac{1}{3} + 2\,\text{次以上}}{\frac{1}{24} + 2\,\text{次以上}} \to \frac{-\frac{1}{3} + 0}{\frac{1}{24} + 0} = -8 \quad (x \to 0)$$

III. $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - x^2/2 + x^4/24 - \cdots}$ に幾何級数展開を組合わせる。
$\frac{x}{\sin x} = \frac{x}{x - x^3/6 + x^5/120 - \cdots} = \frac{1}{1 - x^2/6 + x^4/120 - \cdots}$ に幾何級数展開を組合わせる。
$e^{1-\cos x} = e^{x^2/2 - x^4/24 + \cdots}$ に指数関数の展開を組合わせる。
$e^{-2x/(1-x)} = e^{-2x(1+x+x^2+x^3+\cdots)} = e^{-2x-2x^2-2x^3-\cdots}$ に指数関数の展開を組み合わせる。

IV. (i) $7^{\frac{1}{3}} = (8-1)^{\frac{1}{3}} = 2(1-\frac{1}{8})^{\frac{1}{3}}$ で 2 項展開を考える：

$$\begin{aligned}7^{\frac{1}{3}} &= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{8}\right) + \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{3}}{2!}\left(\frac{-1}{8}\right)^2 + \cdots\right)\end{aligned}$$

頑張って 4 次の項まで和を計算してみると、

$$\begin{aligned}&2\left(1 + \frac{-1}{3 \cdot 8} + \frac{1 \cdot -2}{2 \cdot 3^2 \cdot 8^2} + \frac{1 \cdot -2 \cdot -5 \cdot -1}{6 \cdot 3^3 \cdot 8^3} + \frac{1 \cdot -2 \cdot -5 \cdot -8}{24 \cdot 3^4 \cdot 8^4}\right) \\ =&2 \cdot \left(\frac{3^5 \cdot 8^4 - 3^4 \cdot 8^3 - 3^3 \cdot 8^2 - 5 \cdot 3 \cdot 8 - 10}{3^5 \cdot 8^4}\right) \\ =&2 \cdot \frac{951998}{995328} = \frac{951998}{497664} = 1.9129332\cdots,\end{aligned}$$

N 次 Taylor 近似の誤差

$$R_N(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{1}{N!} \int_0^x (x-t)^N f^{(N+1)}(t) dt$$

の評価を $f(x) = (1+x)^{1/3}$ に対してやってみると

$$\begin{aligned} R_N(-1/8) &\leq \frac{1}{(N+1)!} \Big(\frac{1}{8}\Big)^{N+1} \max_{-\frac{1}{8} \leq t \leq 0} \left| \frac{d^{N+1}}{dt^{N+1}} (1+t)^{1/3} \right| \\ &\leq \frac{1}{(N+1)!} \Big(\frac{1}{8}\Big)^{N+1} \left| \Big(\frac{1}{3}\Big)\Big(\frac{-2}{3}\Big)\Big(\frac{-5}{3}\Big) \cdots \Big(\frac{1}{3} - N\Big) \right| \Big(\frac{8}{7}\Big)^{N+1-\frac{1}{3}} \\ &\leq \frac{1}{(N+1)!} \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3N-1)}{3^{N+1} 7^{N+1}} \end{aligned}$$

これに $N = 4$ などをいれれば $7^{\frac{1}{3}} = 2(1 - \frac{1}{8})^{1/3}$ の誤差評価について

$$2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11}{5! \cdot 3^5 \cdot 7^5} = \frac{44}{3^6 \cdot 7^5} \leq \frac{45}{3^6 \cdot 7^5} \leq \frac{1}{3^4 \cdot 7^4} = \frac{1}{194481} = 0.0000051 \cdots$$

V. 例えば 5 次まで計算したときの誤差は，$0 < t < \frac{1}{10}$ において $e^t \leq e^{\frac{1}{10}} < 2$（最後の不等式は 2^{10} を計算してみれば明らか，実際ずっと 1 に近い）であることを用いれば,

$$\int_0^{\frac{1}{10}} e^t \frac{(\frac{1}{10} - t)^5}{5!} dt \leq 2 \frac{1}{6!} \frac{1}{10^6} = \frac{1}{360} \frac{1}{10^6} \leq 10^{-8}$$

など.