演習３

I. 極限値

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}$$

を計算したい。

(i) $\log(1+x)$ を x のべき級数としてあらわせ。

(ii) (i) を用いて $\dfrac{\log(1+x)-x}{x^2}$ をあらわす x のべき級数をもとめて、$x\to 0$ での極限を計算せよ。

II. 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-(a_0+a_1x+a_2x^2)}{x^3}$ が 0 でない実数となるために必要な、実定数 a_0, a_1, a_2 を決定せよ。またそのときの極限値を求めよ。

III. $\sin\frac{1}{10}$ の小数近似値を

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\int_0^x\frac{(x-t)^6}{6!}\frac{d^7}{dt^7}\sin t\,dt$$

を利用して求めよ ($\sin x$ の $x=0$ における 5 次近似の誤差は自動的に 6 次近似の誤差に等しかったことに注意)。誤差の評価も与えよ。

I. (i) $\log(1-x)$, $\log(1+x)$ の x に関するべき級数はそれぞれ、$\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$ の幾何級数展開を積分してつくれるのだった。

(ii) 分子は $(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots)-x=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$、よって求めたい比の極限値 $-\dfrac{1}{2}$ がわかる。

II. 考え方は **I** の (ii) とおんなじ。分母が x^3 だから分子のほうも x の 2 次以下の部分がちょうど打ち消しあって 3 次の項から始まるように a_0, a_1, a_2 を決めればよい.

III. $\dfrac{1}{6}=0.16666\cdots$, $\dfrac{1}{120}=0.00833333\cdots$ より，5 次近似の値は

$$0.1-0.000166666\cdots+0.000000083333\cdots=0.09983341666666\cdots$$

である。近似の誤差は

$$\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{|x-t|^6}{6!}|\pm\cos t|dt \leq \int_0^{\frac{1}{10}} \frac{|x-t|^6}{720}dt \leq \frac{1}{5040}\cdot\frac{1}{10^7} \leq 0.2\cdot 10^{-10}$$

だから上の近似値は小数点以下 10 桁まで正しい。ここでは $|\pm\cos t| = |\cos t| \leq 1$ をつかった。

なお 5 次近似の誤差は

$$\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{(\frac{1}{10}-t)^5}{5!}(-\sin t)dt$$

と書いてもよいが、この場合は $|\sin t| \leq 1$ ではなく $0 \leq t \leq \frac{1}{10}$ において $|\sin t| \leq t \leq \frac{1}{10}$ としたほうが、誤差評価は正当なまま 1 桁よくなるので、そのほうがよい。