

演習 2

I. (i) $\frac{1}{3-2x}$ の $x=0$ における Taylor 近似を求めよ。

(ii) $\frac{1}{3-2x}$ の $x=2$ における Taylor 近似を求めよ。

II. (i) $\frac{1}{(1-x)^2}$ の $x=0$ における Taylor 近似を求めよ。

(ii) $\frac{1-x}{1-x-2x^2}$ の $x=0$ における Taylor 近似を求めよ。

(iii) $\frac{x}{x+2}$ の $x=1$ における Taylor 近似を求めよ。

III. (i) $\frac{x}{\log(1+x)}$ の $x=0$ における Taylor 近似

$$\frac{x}{\log(1+x)} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

のはじめの係数 a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ。

(ii) $\frac{\log(1+x)}{1-x}$ の $x=0$ における Taylor 近似

$$\frac{\log(1+x)}{1-x} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots$$

のはじめの係数 b_0, b_1, b_2, b_3 を求めよ。

I. (i) $\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{2}{3}x}$ として幾何級数展開する。

(ii) $\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{-1-2(x-2)} = -\frac{1}{1+2(x-2)}$ として幾何級数展開する。

II. (i) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ の両辺を 1 回微分する。

(ii) $1-x-2x^2 = (1+x)(1-2x)$ に注意して $\frac{1-x}{1-x-2x^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-2x}$ と部分分数分解し、それぞれを幾何級数展開して次数ごとにま

とめる。答えは

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n + (-1)^n 2}{3} \right) x^n$$

(余談) いわゆるフィボナッチ数列 $\{a_n\}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$; を係数とする級数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \cdots$$

を考えると、漸化式を用いて $f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = x$ であることがわかる。つまり $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ 。よって (ii) のように部分分数分解と幾何級数展開を考えると、有名な公式

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

をえる。

(iii) $\frac{x}{x+2} = \frac{1+(x-1)}{3+(x-1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-1}{3}} + \frac{(x-1)}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}$ 。それぞれ展開して、次数ごとにまとめる。

III. (i) $\frac{x}{\log(1+x)} = \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots}$ 。これに幾何級数展開を組み合わせ

せて考えて次数ごとに低い方から計算していけばよい。

(ii) $\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \right) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)$ この積を普通に展開して次数ごとに低い方から計算していけばよい。