# 演習１２

**I.** (i) $f(x,y)=x^3+y^3-x^2+xy-y^2$ の各 $(x,y)$ における勾配ベクトル $\nabla f(x,y)=(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$ を計算せよ。また $\nabla f(x,y)=(0,0)$ となる点 $(x,y)$（$f(x,y)$ の停留点という）を全てもとめよ。

(ii) うえで求めた停留点について、極大点、極小点、あるいは極大にも極小にもならない点（鞍点）のいずれになるか、それぞれヘッセ行列の２固有値の符号をしらべて判定せよ。

**II.** $f(x,y)=xy(1-x-y)$ の極値をすべて求めよ。

**III.** $(x,y)$ が $x^2+y^2\leq 2$ を動くとき、$f(x,y)=x^3+y^3-x^2+xy-y^2$ の最大および最小値をもとめよ

---

**I.** (i) $\mathrm{grad} f(x,y)=(3x^2-2x+y,3y^2+x-2y)=(0,0)$ をとく。$x$（あるいは $y$）の $4$ 次方程式をとなるが、一つづつ解を見つけては因数定理で因数分解して次数を下げながらといてみよ。

**II.** 上の **I.** と同じステップを踏む。つまり勾配ベクトルを計算し、停留点をすべてもとめ、極大小を判定する。

**III.** 円板の内部と円周上にわけて極値を考えればよい。つまり円板の内部では関数の停留点を考え、円周上では条件付極値問題として考える。実際、$x^2+y^2<2$ では上の **I.** (i) により、極値がわかっている。円周 $x^2+y^2=2$ 上では条件付極値問題を解いて，ふたつをあわせて結論を導け。