演習１１

I. (i) $f(x,y) = \sin(x+y^2)$ を $(x,y) = (0,0)$ で展開せよ。

(ii) $\dfrac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^4}(0,0)$ をもとめよ。

II. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$ の点 $(1,0)$ におけるテイラー展開を 2 次の項までもとめよ。

I. (i) テイラー展開公式にそってやってもよいが、もっと直接考えてみればよい：

$$\begin{aligned}\sin(x+y^2) &= (x+y^2) - \frac{1}{6}(x+y^2)^3 + \frac{1}{120}(x+y^2)^5 - \cdots \\ &= x + y^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2y^2}{2} + \left(-\frac{xy^4}{2} + \frac{x^5}{120}\right) + \cdots\end{aligned}$$

(ii) 直接微分していくと間違えやすい（と思う）。そこで展開の公式

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(a,b) \cdot (x-a)^{n-k}(y-b)^k$$

と (i) でもとめた結果を比較すると、

$$\frac{1}{5!}\binom{5}{1} \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^4}(0,0) xy^4 = -\frac{1}{2}xy^4$$

だから

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^4}(0,0) = -\frac{120}{5} \cdot \frac{1}{2} = -12.$$

II. $f(x,y) = -2 - 3(x-1)^2 - 3y^2 + \cdots$. このケースでは結果として、

$x-1$ や y の 1 次の部分や、2 次でも $(x-1)y$ の部分は出てこない。