演習１０

I. $x^2+3y^2=12$ をみたしながら (x,y) がうごくとき、$f(x,y)=\frac{1}{3}x^3-y^3+6y^2$ の極値をもとめよ。

II. $\varphi(x,y)=x^2+y^2-1=0$ をみたしながら (x,y) がうごくとき $f(x,y)=2x^2+4xy+5y^2$ の最大、最小値とそれらを与える (x,y) を求めよ。

I. $\varphi(x,y)=x^2+3y^2-12$ とする。Lagrange の未定乗数 λ を用いた連立方程式

$$\mathrm{grad} f(x,y)=\lambda\cdot\mathrm{grad}\varphi(x,y)$$
$$\varphi(x,y)=0$$

は今の場合、

$$x^2=2\lambda x,\quad -3y^2+12y=6\lambda y,\quad x^2+3y^2=12$$

はじめの 2 式から

$$x=0 \text{ または } 2\lambda$$
$$y=0 \text{ または } 4-2\lambda$$

$(x,y)=(0,4-2\lambda)$ を 3 式に入れると $3(4-2\lambda)^2=12$ より $\lambda=1,3.$ よって $(x,y)=(0,-2)$ または $(0,2)$
$(x,y)=(2\lambda,0)$ を 3 式に入れると、$\lambda=\pm\sqrt{3}.$ したがって $(x,y)=(\pm2\sqrt{3},0).$
$(x,y)=(2\lambda,4-2\lambda)$ を 3 式に入れると、$\lambda=\frac{3}{2}.$ よって $(x,y)=(3,1)$ がでる。

さて極大、小の判定について考えよう。ここでは詳しい議論を与えておくが、問題の設定からもっと単純に論じてよいケースもよくあることに注意しておく。

ここで説明するのは、極値の候補となる点における $f(x,y(x))$、あるいは $f(x(y),y)$、の 2 次、必要なら高次のテイラー近似をみてふるまいを調べればよいということである。

まず $\varphi(x,y)=x^2+3y^2-12=0$ の陰関数 $y=y(x)$ について、$2x+6yy'=0$ より $y'=-\frac{x}{3y}$ である。

一方 $(\pm2\sqrt{3},0)$ では陰関数 $y=y(x)$ はとれないので $x=x(y)$ をかんがえると $2xx'+6y=0$ より $x'=-\frac{3y}{x}.$

さて、$y \neq 0$ のとき $y = y(x)$ をとってやると

$$\begin{aligned} f'(x, y(x)) &= x^2 - 3y^2 y' + 12yy' \\ &= x^2 - 3y^2\left(\frac{-x}{3y}\right) + 12y\left(\frac{-x}{3y}\right) \\ &= x^2 + xy - 4x \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} f''(x, y(x)) &= (x^2 + xy - 4x)' \\ &= 2x + y + xy' - 4 \\ &= 2x + y - \frac{x^2}{3y} - 4 \end{aligned}$$

である。これに $(x, y) = (0, \pm 2)$ を代入するとともに負なので $(0, \pm 2)$ では極大となる。$f(0, 2) = -8 + 24 = 16$, $f(0, -2) = 8 + 24 = 32$ がそれぞれ極大値。

次に $(x, y) = (3, 1)$ を代入すれば $f''(3, 1) = 0$ である。よってこの場合はさらに 3 次微分を調べてみると、$f'''(x, y(x)) = 2 + y' - \frac{6xy - 3x^2 y'}{9y^2} = 2 - \frac{x}{3y} - \frac{6xy + (x^3/y)}{9y^2}$ より $f'''(3, 1) = 2 (\neq 0)$ であって、

$$\begin{aligned} & f(x, y(x)) \\ =& f(3, 1) + f'(3, 1)(x - 3) + \frac{f''(3, 1)}{2}(x - 3)^2 + \frac{f'''(3, 1)}{6}(x - 3)^3 + \cdots \\ =& f(3, 1) + \frac{2}{6}(x - 3)^3 + \cdots \end{aligned}$$

であるから、$x = 3$ $(y = 1)$ のまわりでは符号変化が起こるので、$(x, y) = (3, 1)$ は極大でも極小でもない (変曲点)。

$(x, y) = (\pm 2\sqrt{3}, 0)$ では陰関数 $y = y(x)$ とれないので、陰関数 $x = x(y)$, $\varphi(x(y), y) = 0$ を考える。このとき前と同様に $f''(x(y), y)$（y についての微分）を計算して $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$ を代入すると $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$ では極小で値はそれぞれ $\pm 8\sqrt{3}$ であることがわかる。実際、計算してみると

$$\begin{aligned} f'(x(y), y) &= x^2 \frac{dx}{dy} - 3y^2 + 12y \\ &= -3yx - 3y^2 + 12y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x(y), y) &= -3y\frac{dx}{dy} - 3x - 6y + 12 \\ &= \frac{3y^2}{x} - 3x - 6y + 12 \end{aligned}$$

より

$$f''(\pm 2\sqrt{3}, 0) = \mp 6\sqrt{3} + 12 > 0$$

よって $(\pm 2\sqrt{3}, 0)$ では極小。

II. 解き方は **I** と同様にやればよい。$x^2+y^2=1$ は有界閉集合であり、連続関数の最大値定理から、$f(x,y)$ は $x^2+y^2=1$ 上で最大値、最小値をとることは保証されている。いま、最大最小値を聞かれているので、極値の候補の点をラグランジュ乗数法で特定したら、それぞれの点での $f(x,y)$ の値を求めて、最大のものを最大値、などとして採用すればよい（$f(x,y(x))$ の Taylor 展開を論じなくてもよい。もちろん論じても全くよいが。）