

練習問題 3 (関数方程式概論)

1 3次元空間をみたしている流体の速度場 $v(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t), v_3(x, t))$ ($x = (x_1, x_2, x_3)$, $t \geq 0$) が与えられているとする. また, 時刻 $t = 0$ において位置 $x = \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ にいた流体粒子が速度場 v に沿って流れるとき, その流体粒子の時刻 t における位置を $x = \varphi(\xi, t) = (\varphi_1(\xi, t), \varphi_2(\xi, t), \varphi_3(\xi, t))$ とする. さらに, 各 φ_i ($i = 1, 2, 3$) は滑らかな関数であると仮定し, t を固定し ξ の関数と見なしたときの $\varphi(\xi, t)$ の Jacobian を $J(\xi, t)$ とする. すなわち, $J(\xi, t) := \det\left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}\right)$. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $\varphi(\xi, t)$ がみたすべき式を速度場 v を用いて書き下せ.
- (2) $\frac{\partial}{\partial t} J(\xi, t) = J(\xi, t)(\nabla \cdot v)(\varphi(\xi, t), t)$ が成り立つことを示せ.