

練習問題 1 2 (応用解析第 1)

1 以下の問いに答えよ。ただし、級数の収束性については議論しなくてもよい。

(1) 周期境界条件の下での波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & x \in \mathbf{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), & x \in \mathbf{R} \\ u(x + 2l, t) = u(x, t), & x \in \mathbf{R}, t > 0 \end{cases}$$

の Fourier 級数解を Fourier の方法を用いて求めよ。

(2) (1) で求めた Fourier 級数解から出発して、d'Alembert の公式

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x-t) + f(x+t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy$$

を導出せよ。