

練習問題 3 (数学 3 B)

1 区間 I で定義された関数 f に対して、ある定数 $L \geq 0$ が存在し、任意の $x, y \in I$ に対して $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ が成り立つとき、 f は I で Lipschitz (リプシッツ) 連続であるという。 f が I で Lipschitz 連続ならば、 I で一様連続であることを示せ。

2 区間 I で定義された関数 f が次の性質を持つとする：

「ある正数 ε_0 および区間 I における数列 $\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ が存在して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0 \quad \text{および} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

が成り立つ。」

このとき、 f は I で一様連続ではないことを示せ。

(これより、 f が I で一様連続でないことを証明するためには、上の性質をもつ数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を構成すればよいことが分かる。)