数学解析第１　第６回講義ノート

4　関数列と関数項級数

この節では，陰関数定理の証明の準備として関数列および関数項級数の収束を学んでいく．陰関数定理の証明では，陰関数を構成していくことになるが，そのために陰関数の近似関数を構成し，その近似関数の極限関数が望みの陰関数になることを示す．実数列や Euclid 空間における点列の収束という概念は一つしかなかったのに対し，関数列になると無限に異なる収束の概念が存在する．ここでは，基本的な２つの収束の概念を紹介しよう．

定義 4.1（関数列の収束）　$f, f_n\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ を区間 I で定義された関数とする．

(1)　関数列 $\{f_n\}$ が f に**各点収束**するとは，任意の $x \in I$ を固定するごとに数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に収束するとき，すなわち，任意の $x \in I$ および任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 n_0 が存在し，$n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n に対して $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つときをいう．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{（各点）} \qquad \text{あるいは} \qquad f_n \to f \text{（各点）}$$

と書く．

(2)　関数列 $\{f_n\}$ が f に**一様収束**するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 n_0 が存在し，$n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n および任意の $x \in I$ に対して $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つときをいう．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{（一様）} \qquad \text{あるいは} \qquad f_n \to f \text{（一様）}$$

と書く．

関数列 $\{f_n\}$ が f に各点収束することの定義を論理記号を用いて書くと次のようになる．

$$\forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}\ \bigl(n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\bigr)$$

また，関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束することの定義を論理記号を用いて書くと次のようになる．

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}\ \forall x \in I\ \bigl(n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\bigr)$$

これらの違いは「$\forall x \in I$」の位置にあることに注意しよう．各点収束の場合，n_0 は一般には ε だけでなく x にも依存しており，x を変えるとそれに応じて n_0 を大きく取らなければならない．それに対して一様収束の場合には，n_0 は ε だけから決まり，x に関して無関係に（すなわち一様に）取ることができる．数列 $f_n(x)$ が位置 x に関して一様な（無関係な）速さで $f(x)$ に収束することから一様収束と呼ばれるのである．このことから，一様収束すれば各点収束することが分かるが，その逆は一般には成り立たないことに注意しよう．

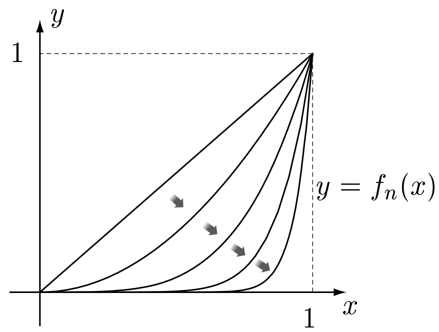
一様収束することの必要十分条件を次の形で書いておくと各点収束との違いが明確になるであろう．すなわち，区間 I で定義された関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束するための必要十分条件は次式が成り立つことである．

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

一様収束性をよりよく理解するためには，各点収束するが一様収束しないような関数列の例を見るのがいいであろう．

例 4.1　$f_n(x) = x^n$ により，閉区間 $I = [0, 1]$ で定義された関数列 $\{f_n\}$ を定めると

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$



となる．したがって，関数列 $\{f_n\}$ は上式で定義される関数 f に各点収束する．ところが，

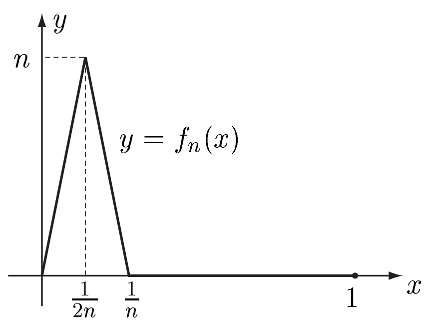
$$\sup_{0\leq x\leq 1} |f_n(x) - f(x)| = 1 \qquad (\forall n \in \mathbf{N})$$

であるから $\{f_n\}$ は f に一様収束はしない．この例では，x が $x < 1$ を満たしながら 1 に近づけば近づくほど，数列 $\{f_n(x)\}$ の 0 に収束する速度が遅くなっており，そこで一様収束性が崩れているのである．

この例では連続な関数列 $\{f_n\}$ の極限関数 f が $x = 1$ において不連続になっており，そのことが原因で一様収束性が崩れていると見なすこともできる．そうすると，連続な関数列 $\{f_n\}$ の極限関数 f もまた連続になっていれば一様収束しているに違いないと期待する人がいるかもしれないが，次の例から分かるようにそれは誤りである．

例 4.2　次のように区間 $I = [0, 1]$ で定義された連続関数列 $\{f_n\}$ を定める．

$$f_n(x) := \begin{cases} 2n^2x & \left(0 \leq x < \frac{1}{2n}\right) \\ 2n(1 - nx) & \left(\frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{n} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$$



このとき，関数列 $\{f_n\}$ は 0 に各点収束するが，

$$\max_{0\leq x\leq 1} |f_n(x)| = n \qquad (\forall n \in \mathbf{N})$$

であるから一様収束はしない．

定理 4.1　区間 I で定義された連続な関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束すれば，その極限関数 f もまた I で連続である．

証明 $x_0 \in I$ を任意に取り固定しよう．任意の正数 ε に対して，$\{f_n\}$ が f に一様収束することから，ある自然数 n_0 が存在して，$n \geq n_0$ を満たす任意の自然数 n および任意の $x \in I$ に対して $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ が成り立つ．特に，

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (x \in I)$$

となる．また，f_{n_0} は区間 I で連続であることから，先の正数 ε に対してある正数 δ が存在し，$|x - x_0| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ．したがって，$|x - x_0| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= \big|\big(f(x) - f_{n_0}(x)\big) + \big(f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\big) + \big(f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\big)\big| \\
&\leq \big|f(x) - f_{n_0}(x)\big| + \big|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\big| + \big|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\big| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

となるが，これは関数 f が x_0 で連続であることを示している．ところが $x_0 \in I$ は任意であったから，f は I で連続である.（証明終）

この関数列の一様収束性は，以下の定理で見ていくように，極限と積分の順序交換，あるいは極限と微分の順序交換を保証するための十分条件にも用いられる.

定理 4.2 閉区間 $[a, b]$ で定義された連続な関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束すれば次式が成り立つ.

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad \left(= \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx\right)$$

証明 仮定より

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \\
&\leq (b-a) \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| \\
&\to 0 \qquad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

となることに注意すればよい.（証明終）

例 4.3 極限と積分の順序交換が成り立たないような例を挙げることにより，定理 4.2 における仮定（すなわち，$\{f_n\}$ が f に一様収束すること）の重要性を理解してもらおう．$\{f_n\}$ を例 4.2 における関数列とする．$\{f_n\}$ は 0 に各点収束していたが一様収束はしていなかった．また明らかに，$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ が成り立つ．したがって，

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

となり，例 4.2 における関数列 $\{f_n\}$ に対しては極限と積分の順序は交換できない.

定理 4.3 閉区間 $[a,b]$ で定義された C^1 級の関数列 $\{f_n\}$ が f に各点収束し，かつその導関数からなる関数列 $\{f_n'\}$ が g に一様収束すれば，極限関数 f もまた C^1 級であり $f'=g$，すなわち

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$$

が成り立つ．

証明 各関数 f_n は $[a,b]$ で C^1 級であるから，微分積分学の基本定理より，任意の $x\in[a,b]$ に対して

$$f_n(x)-f_n(a)=\int_a^x f_n'(y)dy$$

となる．仮定より $\{f_n\}$ は f に各点収束，$\{f_n'\}$ は g に一様収束しているので，上式において $n\to\infty$ とすれば，定理 4.2 より

$$f(x)-f(a)=\int_a^x g(y)dy \qquad (x\in[a,b])$$

となる．定理 4.1 より極限関数 g は $[a,b]$ で連続であるから，再び微分積分学の基本定理より，この右辺の関数は $[a,b]$ で C^1 級である．それゆえ左辺の関数 f もまた $[a,b]$ で C^1 級であり，$f'=g$ が成り立つ.（証明終）

例 4.4 ここでも，極限と微分の順序交換が成り立たない例を挙げることにより定理 4.3 の仮定の重要性を理解してもらおう．$f_n(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ により定まる閉区間 $[0,1]$ で定義された関数列 $\{f_n\}$ を考えよう．

$$\max_{0\le x\le 1}|f_n(x)|=\frac{1}{n+1}\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

より，$\{f_n\}$ は 0 に一様収束する．一方，$f_n'(x)=x^n$ より，$f_n'(1)=1$ $(\forall n\in\mathbf{N})$ である．したがって，

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(1)=1\neq 0=\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'(1)$$

となり，極限の微分の順序は交換できない．今の場合，$\{f_n'\}$ は各点収束しているが一様収束していないことに注意しよう．

定義 4.2（関数項級数の収束） f_n $(n=1,2,3,\ldots)$ を区間 I で定義された関数とする．このとき，関数列 $\{f_n\}$ から作られる形式

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1+f_2+f_3+\cdots$$

を**関数項級数**といい，$s_n := f_1+f_2+\cdots+f_n$ を（すなわち，$s_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x), x\in I$ により定まる関数 s_n を）その第 n 部分和という．数列から作られる級数のときと同様，その関数項級数はしばしば $\sum f_n$ と略記される．第 n 部分和からなる関数列 $\{s_n\}$ が関数 F に各点収束（または一様収束）するとき，関数項級数 $\sum f_n$ は F に**各点収束**（または**一様収束**）するという．

積分の線形性および微分の線形性に注意し，第 n 部分和からなる関数列 $\{s_n\}$ に対して定理 4.2 および定理 4.3 を適用すれば次の定理が得られる．

定理 4.4（項別積分）　閉区間 $[a,b]$ で定義された連続な関数列 $\{f_n\}$ に対して，関数項級数 $\sum f_n$ が F に一様収束すれば次式が成り立つ．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b F(x)dx \quad \left(= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx\right)$$

証明　$s_n(x) := f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$ を第 n 部分和とすると，仮定より $\{s_n\}$ は閉区間 $[a,b]$ で定義された連続な関数列であり，F に一様収束している．したがって，定理 4.1 より F もまた $[a,b]$ で連続であり，定理 4.2 より

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x)dx = \int_a^b F(x)dx$$

が成り立つ．ここで，

$$\int_a^b s_n(x)dx = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} f_j(x)dx = \sum_{j=1}^{n}\int_a^b f_j(x)dx \to \sum_{j=1}^{\infty}\int_a^b f_j(x)dx \quad (n\to\infty)$$

より，望みの式が従う．（証明終）

定理 4.5（項別微分）　閉区間 $[a,b]$ で定義された C^1 級の関数列 $\{f_n\}$ に対して，関数項級数 $\sum f_n$ が各点収束し，かつその導関数からなる関数項級数 $\sum f_n'$ が一様収束すれば，$\sum f_n$ もまた C^1 級であり次式が成り立つ．

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$$

証明　$s_n(x) := f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$ を第 n 部分和とすると，仮定より $\{s_n\}$ は閉区間 $[a,b]$ で定義された C^1 級の関数列であり，$\sum f_n$ に各点収束している．また，微分の線形性より

$$s_n'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_n'(x)$$

が成り立つことに注意すると，導関数からなる関数列 $\{s_n'\}$ は $\sum f_n'$ に一様収束している．したがって，定理 4.3 より $\sum f_n$ もまた閉区間 $[a,b]$ で C^1 級であり，$\left(\sum f_n\right)' = \sum f_n'$ が成り立つ．（証明終）