レポート問題９ (関数方程式第１)　　Dec. 9, 2013 (Mon.)

$\boxed{1}$ $f_1, f_2 \in C^1(\mathbf{R})$ に対して，$\mathbf{R}$ 上の関数 f および $\{f'\}$ を

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & x > 0 \\ f_2(x) & x < 0 \end{cases} \qquad \{f'\}(x) := \begin{cases} f_1'(x) & x > 0 \\ f_2'(x) & x < 0 \end{cases}$$

により定める．このとき，

$$f' = \{f'\} + \big(f_1(0) - f_2(0)\big)\delta \qquad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\mathbf{R})$$

が成り立つことを示せ．ただし，δ は Dirac の δ 関数である．

$\boxed{2}$ パラメーター $\varepsilon > 0$ に依存する $\mathbf{R}^n$ 上の可積分関数 G_ε は以下の条件 (1)–(3) を満たしているとする：

(1) $G_\varepsilon(x) \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbf{R}^n\ \forall \varepsilon > 0)$

(2) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} G_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 1 \quad (\forall \varepsilon > 0)$

(3) $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{|x| \geq \alpha} G_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (\forall \alpha > 0)$

このとき，

$$\lim_{\varepsilon \to +0} G_\varepsilon = \delta \qquad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$$

が成り立つことを示せ．ただし，δ は Dirac の δ 関数である．

レポート作成上の注意

- A４版のレポート用紙を使用し，表紙を付けること．表紙には科目名，レポート番号，学籍番号，氏名を記入すること．レポートの左上をホチキス留めすること．
- 最終的な答えだけでなく，途中計算を分かりやすく説明すること．
- ワープロ，TEX 等は使用せず，手書きで（丁寧な字で）作成すること．
- レポートは次回の講義終了後に回収する．