数学解析第１　第１２回講義ノート

**定義 7.3** $\Omega$ を $\mathbf{R}^n$ の領域，$\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$ を $\Omega$ で定義された連続なベクトル場とする．$\boldsymbol{u}$ が $\Omega$ においてスカラーポテンシャル（あるいは単に，ポテンシャル）をもつとは，スカラー場 $f \in C^1(\Omega)$ が存在して

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} f = \nabla f \qquad \text{すなわち} \qquad u_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (1 \leq j \leq n)$$

が成り立つときをいう．このとき，スカラー場 $f$ をベクトル場 $\boldsymbol{u}$ のスカラーポテンシャル（あるいは単に，ポテンシャル）という．

**定義 7.4** $\Omega$ を $\mathbf{R}^3$ の領域，$\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)$ を $\Omega$ で定義された連続なベクトル場とする．$\boldsymbol{B}$ が $\Omega$ においてベクトルポテンシャルをもつとは，$C^1$ 級のベクトル場 $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$ が存在して

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

が成り立つときをいう．このとき，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ をベクトル場 $\boldsymbol{B}$ のベクトルポテンシャルという．

**例 7.1** (1) 3 次元空間における鉛直下向きの一様な重力場 $\boldsymbol{F}$ を考えよう．このような重力場 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -g\boldsymbol{e}_3$$

で与えられる．ここで，$g$ は重力加速度であり，$\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ は鉛直上向きの単位ベクトルである．このとき，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \nabla(-gx_3)$$

であるから，$\boldsymbol{F}$ はポテンシャル $-gx_3$ をもつ．なお，物理ではこのポテンシャルの符号を変えた $gx_3$ を重力ポテンシャルと呼んでいる．

(2) 3 次元空間における質量 $M$ の質点による万有引力が作り出す力の場 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -MG\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^3}$$

で与えられる．ここで，$G$ は万有引力定数であり，$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ である．このとき，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \nabla\Big(MG\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\Big)$$

であるから，$\boldsymbol{F}$ はポテンシャル $MG\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}$ をもつ．物理ではこの場合も，このポテンシャルの符号を変えた $-MG\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}$ を万有引力のポテンシャルと呼んでいる．

力の場 $\boldsymbol{F}$ がポテンシャルをもつとき，その力はポテンシャル力あるいは保存力であると言う．時刻 $t$ において位置 $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ にいる質量 $m$ の質点がポテンシャル力 $\boldsymbol{F} = -\nabla f$ の下で運動しているとしよう．このとき，運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}(t) = m\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t)) = -m(\nabla f)(\boldsymbol{x}(t))$$

すなわち，

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_j}{\mathrm{d}t^2}(t) = -m\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}(t)) \qquad (1 \leq j \leq 3)$$

で与えられる．このとき，上式と合成関数の微分法より

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|^2\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2\right) = \sum_{j=1}^{3} m\frac{\mathrm{d}^2 x_j}{\mathrm{d}t^2}(t)\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}(t) \\ &= -\sum_{j=1}^{3} m\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}(t))\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(mf(\boldsymbol{x}(t))\big)\end{aligned}$$

が成り立つ．特に，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|^2 + mf(\boldsymbol{x}(t))\right) = 0$$

となり，

$$\frac{1}{2}m\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|^2 + mf(\boldsymbol{x}(t)) \equiv \text{定数}$$

が得られる．物理では，この式は力学的エネルギーの保存則と呼ばれており，この左辺第 1 項目は運動エネルギー，第 2 項目は位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）である．

**定理 7.2** $\Omega$ を $\mathbf{R}^n$ の領域，$\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ を $\Omega$ で定義された連続なベクトル場とし，$\Omega$ においてポテンシャル $f$ を持つとする．このとき，点 $\boldsymbol{x}_0$ から点 $\boldsymbol{y}_0$ へ向かう $\Omega$ 内の任意の $C^1$ 級の曲線 $C$ に対して，

$$\int_C \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{y}_0) - f(\boldsymbol{x}_0)$$

が成り立つ．

**証明** 仮定より，$\boldsymbol{u} = \nabla f$ が成り立っている．さて，曲線 $C$ は

$$C:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \qquad (a \leq t \leq b)$$

とパラメーター表示されているとする．このとき，$\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{x}_0$ および $\boldsymbol{\varphi}(b) = \boldsymbol{y}_0$ が成り立っていることに注意しよう．線積分の定義および合成関数の微分法から

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_a^b \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (\nabla f)(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\boldsymbol{\varphi}'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\boldsymbol{\varphi}(t))\mathrm{d}t = f(\boldsymbol{\varphi}(b)) - f(\boldsymbol{\varphi}(a)) \\ &= f(\boldsymbol{y}_0) - f(\boldsymbol{x}_0)\end{aligned}$$

となり，望みの式が示された.（証明終）

このことから，ポテンシャルをもつベクトル場に対する線積分の値は，線分路 $C$ の途中経路によらず，始点と終点のみで決まることが分かる．力の場 $\boldsymbol{F}$ の下，物体が曲線 $C$ に沿って動いた時，その力が物体にした仕事 $W$ は

$$W = \int_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

で与えられる．定理 7.2 より，力の場が保存力になっていれば，その力がする仕事は物体の動いた経路によらず，始点と終点の位置エネルギーの差で与えられることが分かる．

さて，力の場が保存力であれば，力学的エネルギーの保存則が成立する．また，力の場がする仕事も物体の移動経路によらない．それゆえ，どのような力の場が保存力であり，どのようにしてポテンシャルを求めるかは重要な問題であろう．以下ではその問題を考えていく．なお，ポテンシャルが一つ見つかれば，それに定数を加えたものもポテンシャルになる．このような意味でポテンシャルは一意には決まらない．しかし，その不定性は定数差しかないことに注意しよう．

**定理 7.3** $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ を $\mathbf{R}^n$ で定義された $C^1$ 級のベクトル場とする．このとき，$\boldsymbol{u}$ が $\mathbf{R}^n$ においてポテンシャル $f \in C^2(\mathbf{R}^n)$ をもつための必要十分条件は

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) \qquad (1 \leq i, j \leq n,\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n) \tag{7.1}$$

が成り立つことである．

特に，$\mathbf{R}^3$ で定義された $C^1$ 級のベクトル場 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ がポテンシャルをもつための必要十分条件は

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3)$$

である．

**証明**（必要条件）$\boldsymbol{u}$ がポテンシャル $f \in C^2(\mathbf{R}^n)$ をもつとしよう．このとき，$u_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ $(1 \leq j \leq n)$ が成り立つ．したがって，$f$ が $C^2$ 級であることに注意すれば

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

が成り立つ．

（十分条件）$\boldsymbol{u}$ が条件 (7.1) を満たしているとしよう．やや天下りではあるが，ポテンシャル $f$ を次式で定める．

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \int_0^{x_1} u_1(y_1, 0, \ldots, 0)\mathrm{d}y_1 + \int_0^{x_2} u_2(x_1, y_2, 0, \ldots, 0)\mathrm{d}y_2 \\ &\quad + \cdots + \int_0^{x_n} u_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n)\mathrm{d}y_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} \int_0^{x_j} u_j(x_1, \ldots, x_{j-1}, y_j, 0, \ldots, 0)\mathrm{d}y_j \end{aligned}$$

このとき，条件 (7.1) を用いると，各 $i$ に対して

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) &= u_i(x_1,\ldots,x_i,0,\ldots,0) + \sum_{j=i+1}^{n}\int_0^{x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_{j-1},y_j,0,\ldots,0)\mathrm{d}y_j \\
&= u_i(x_1,\ldots,x_i,0,\ldots,0) + \sum_{j=i+1}^{n}\int_0^{x_j}\frac{\partial u_i}{\partial y_j}(x_1,\ldots,x_{j-1},y_j,0,\ldots,0)\mathrm{d}y_j \\
&= u_i(x_1,\ldots,x_i,0,\ldots,0) \\
&\quad + \sum_{j=i+1}^{n}\big(u_i(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j,0,\ldots,0) - u_i(x_1,\ldots,x_{j-1},0,0,\ldots,0)\big) \\
&= u_i(x_1,\ldots,x_i,0,\ldots,0) \\
&\quad + \big(u_i(x_1,\ldots,x_{i+1},0,\ldots,0) - u_i(x_1,\ldots,x_i,0,\ldots,0)\big) \\
&\quad + \big(u_i(x_1,\ldots,x_{i+2},0,\ldots,0) - u_i(x_1,\ldots,x_{i+1},0,\ldots,0)\big) \\
&\quad + \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&\quad + \big(u_i(x_1,\ldots,x_n) - u_i(x_1,\ldots,x_{n-1},0)\big) \\
&= u_i(x_1,\ldots,x_n)
\end{aligned}$$

が成り立ち，$f$ が $\boldsymbol{u}$ のポテンシャルであることが確かめられた.（証明終）

上の証明では天下り的にポテンシャル $f$ を定義したが，なぜあのように定義したか疑問に思う人も多いであろう．実はこれにはからくりがある．$\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ を任意に固定する．任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{x}_0$ から出発し $\boldsymbol{x}$ に至る向き付けられた $C^1$ 級の曲線を $C_{\boldsymbol{x}}$ とし，

$$f(\boldsymbol{x}) := \int_{C_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{C_{\boldsymbol{x}}} u_1\mathrm{d}x_1 + \cdots + u_n\mathrm{d}x_n$$

と定めよう．この線積分の値は一般には曲線 $C_{\boldsymbol{x}}$ の選び方によるが，条件 (7.1) の下では，どのように曲線 $C_{\boldsymbol{x}}$ を選んでも，線積分の値は不変であることが示される．実際，$\boldsymbol{u}$ がポテンシャルをもてば，定理 7.2 より，その線積分の値は積分路の途中経路によらないのであるから，このようなことが成立するのを期待するのは自然であろう．上の定理 7.3 の証明では，$\boldsymbol{x}_0$ を座標原点にとり，積分路 $C$ を各座標軸に平行になるように選んだのである．ポテンシャルを計算する際は，計算しやすいように積分路 $C$ を選んで線積分を計算してもよいし，もっと直接的に以下のように計算してもよい．

**例 7.2** (1) $\mathbf{R}^2$ におけるベクトル場 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ を，$\boldsymbol{u}(x,y) = (x^2y^2 + x, x^3y + y^2)$ で定めよう．このとき，

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = 2x^2y, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = 3x^2y \qquad \therefore \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} \neq \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

したがって，ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ はポテンシャルをもたない．

(2) $\mathbf{R}^2$ におけるベクトル場 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ を，$\boldsymbol{u}(x,y) = (2xy, x^2 + 2y)$ で定めよう．このとき，

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = 2x = \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

であるから，ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ はポテンシャルをもつ．その一つを $f$ とすると，

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u_1 = 2xy \qquad \therefore \quad f(x,y) = x^2y + g(y)$$

したがって，

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 + 2y \ (= u_2) \qquad \therefore \quad g'(y) = 2y \qquad \therefore \quad g(y) = y^2 + C$$

ゆえに，ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ のポテンシャル $f$ は

$$f(x,y) = x^2y + y^2 + C \qquad (C:\text{任意定数})$$

で与えられる．

以上のことから，全空間 $\mathbf{R}^n$ で定義された $C^1$ 級のベクトル場に対して，ポテンシャルが存在するかどうかの判定法とその計算法が分かった．しかし，特異点をもつようなベクトル場（言い換えれば，定義域が全空間でないようなベクトル場）に対しては，条件 (7.1) が成り立っていても（大域的に定義された）ポテンシャルが存在するとは限らない．その辺りの様子を見ていこう．

座標原点を除いた平面上で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ を，

$$\boldsymbol{u}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

で定めよう．$(x,y) = (0,0)$ では定義されていないことに注意して欲しい．容易に確かめられるように，

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

が成り立っており，定理 7.3 の条件 (7.1) が満たされている．このベクトル場 $\boldsymbol{u}$ は次の意味で局所的にはポテンシャルをもつ．すなわち，位置ベクトル $(x,y)$ と $x$ 軸とのなす角度を $\theta$ とすれば，$f(x,y) = \theta$ がポテンシャルになる．実際，$x > 0$ に対しては，そのような関数 $f$ は

$$f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$$

で与えられる.（実際に微分を計算して，$\boldsymbol{u}$ のポテンシャルになっていることを確かめて欲しい.）これを $x \leq 0$ の方に向かって拡張していくことが可能なことは，幾何学的には容易に理解されよう．問題は，そのようにして原点を除く平面上に拡張していっても，かならずどこかで不連続性が生じてしまうのである．例えば，$(x,y)$ を単位円周に沿って反時計回りに動かしていくと，$\theta$ の値は単調に増加し，一周回ってくると $2\pi$ だけ値が増えてしまい，不連続になってしまう．このような例の場合，ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の定義域を原点だけを除くのではなく，例えば，$x$ 軸の負の部分も抜いて

$$\Omega := \{(x,0) \mid x \leq 0\}^c = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \leq 0\}$$

としておくと，ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ は $\Omega$ においてポテンシャルをもち，上で定めた関数がそのポテンシャルになることが分かる．

ここでは，簡単な例を一つとって説明したが，以下ではこれを系統的に扱おう．

**定義 7.5** $\Omega$ を $\mathbf{R}^n$ の領域とする．$\Omega$ が単連結であるとは，$\Omega$ 内の任意の閉曲線が $\Omega$ 内で連続的に 1 点に縮められるときをいう．

平面上の同心円の内部 $\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \,|\, a < \|\boldsymbol{x}\| < b\}$ $(0 < a < b)$ 等が単連結でない領域の代表例である．ただし，3 次元空間内の同心円の内部 $\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \,|\, a < \|\boldsymbol{x}\| < b\}$ は単連結である．3 次元空間の場合，ドーナツのような形をしているトーラスの内部が単連結にならない．

**定理 7.4** (Poincaré の補題) $\Omega$ を $\mathbf{R}^n$ における単連結領域とし，$\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ を $\Omega$ で定義された $C^1$ 級のベクトル場とする．このとき，$\boldsymbol{u}$ が $\Omega$ においてポテンシャル $f \in C^2(\Omega)$ をもつための必要十分条件は

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) \qquad (1 \leq i, j \leq n,\ \boldsymbol{x} \in \Omega)$$

が成り立つことである．

**証明** 必要条件の証明は定理 7.3 の証明と全く同じであるから，十分条件のみ示せばよい．空間次元 $n$ が 3 以上の場合には，Stokes の定理を使わなければならないので，ここでは $n = 2$（2 次元空間）のときのみを示そう．次元が上がっても，証明の基本的な方針は変わらない．$\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ を任意にとり固定する．任意の $(x, y) \in \Omega$ に対して，$\boldsymbol{x}_0$ から出発し $(x, y)$ に至る向き付けられた $C^1$ 級の曲線を $C$ とし，

$$f(x, y) := \int_C u_1 \mathrm{d}x + u_2 \mathrm{d}y$$

と定める．この線積分の値は積分路 $C$ の取り方によらない．実際，このような曲線を二つ取り，それらを $C_1, C_2$ としよう．これらの曲線で囲まれる領域を $D$ とすると，$\Omega$ が単連結であることから，$D$ の閉包は $\Omega$ に含まれる．曲線 $C_1$ は $D$ の内部を左に見てまわるように向き付けられているとし，曲線 $C_2$ は $D$ の内部を右に見てまわるように向き付けられているとしよう.（曲線 $C_1, C_2$ が絡み合っている場合には，必ずしもこのようには出来ないが，そのような場合でも以下の結果は成立することが確かめられる．しかし，証明が煩雑になるので，ここでは割愛することにする.）このとき，領域 $D$ に対して Green の定理を用いると，仮定より $\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x}$ であるから

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_D \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{C_1 - C_2} u_1 \mathrm{d}x + u_2 \mathrm{d}y \\ &= \int_{C_1} u_1 \mathrm{d}x + u_2 \mathrm{d}y - \int_{C_2} u_1 \mathrm{d}x + u_2 \mathrm{d}y \end{aligned}$$

したがって，

$$\int_{C_1} u_1 \mathrm{d}x + u_2 \mathrm{d}y = \int_{C_2} u_1 \mathrm{d}x + u_2 \mathrm{d}y$$

となり，上で定めた関数 $f(x, y)$ の値は積分路 $C$ によらないことが確かめられた．

次に，この関数 $f(x, y)$ が望みのポテンシャルになっていることを示そう．$h \in \mathbf{R}$ を $0 < |h| \ll 1$ を満たすように任意に取り，$\boldsymbol{x}_0$ から出発し $(x, y)$ に至る向き付けられた $C^1$ 級の曲線を $C_1$，$\boldsymbol{x}_0$ から出発し $(x + h, y)$ に至る向き付けられた $C^1$ 級の曲線を $C_2$，$(x, y)$ から出

発し $(x+h,y)$ に至る向き付けられた直線を $C_3$ とする．このとき，$C_1+C_3$ は $\boldsymbol{x}_0$ から出発し $(x+h,y)$ に至る向き付けられた曲線である．したがって，上で示したことから

$$\begin{aligned} f(x+h,y) &= \int_{C_2} u_1 \mathrm{d}x + u_2 \mathrm{d}y = \int_{C_1+C_3} u_1 \mathrm{d}x + u_2 \mathrm{d}y \\ &= \int_{C_1} u_1 \mathrm{d}x + u_2 \mathrm{d}y + \int_{C_3} u_1 \mathrm{d}x + u_2 \mathrm{d}y \\ &= f(x,y) + \int_{C_3} u_1 \mathrm{d}x + u_2 \mathrm{d}y \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，直線 $C_3$ は $(x+th,y)$ $(0 \leq t \leq 1)$ とパラメーター表示されるので，

$$\int_{C_3} u_1 \mathrm{d}x + u_2 \mathrm{d}y = \int_0^1 u_1(x+th,y) h \mathrm{d}t$$

となり，

$$f(x+h,y) - f(x,y) = h \int_0^1 u_1(x+th,y) \mathrm{d}t$$

が成り立つ．したがって，

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \int_0^1 u_1(x+th,y)\mathrm{d}t = u_1(x,y)$$

となり，

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u_1$$

が得られる．全く同様にして，$\frac{\partial f}{\partial y} = u_2$ となることも示され，$f$ が望みのポテンシャルであることが分かる．(証明終)

次に，ベクトルポテンシャルの存在について考える．

**定理 7.5** $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)$ を $\mathbf{R}^3$ で定義された $C^1$ 級のベクトル場とする．このとき，$\boldsymbol{B}$ が $\mathbf{R}^3$ において $C^2$ 級のベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ をもつための必要十分条件は

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3) \tag{7.2}$$

が成り立つことである．

**証明** (必要条件) $\boldsymbol{B}$ が $C^2$ 級のベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ をもつとしよう．このとき，$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ である．したがって，

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = \operatorname{div} (\operatorname{rot} \boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$$

が成り立つ．

（十分条件）$\boldsymbol{B}$ が条件 (7.2) を満たしているとしよう．そして，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を

$$\begin{cases} A_1(x_1,x_2,x_3) := \displaystyle\int_0^{x_3} B_2(x_1,x_2,y_3)\mathrm{d}y_3 - \int_0^{x_2} B_3(x_1,y_2,0)\mathrm{d}y_2 \\ A_2(x_1,x_2,x_3) := -\displaystyle\int_0^{x_3} B_1(x_1,x_2,y_3)\mathrm{d}y_3 \\ A_3(x_1,x_2,x_3) := 0 \end{cases}$$

により定める．このとき，容易に分かるように

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_1(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial A_3}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) = B_1(\boldsymbol{x})$$
$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_2(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial A_1}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) = B_2(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．また，条件 (7.2) より $\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial B_3}{\partial x_3}$ であるから，

$$\begin{aligned}
(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_3(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial A_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \\
&= -\int_0^{x_3} \frac{\partial B_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, y_3)\mathrm{d}y_3 - \int_0^{x_3} \frac{\partial B_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, y_3)\mathrm{d}y_3 + B_3(x_1, x_2, 0) \\
&= -\int_0^{x_3} \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, y_3) + \frac{\partial B_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, y_3)\right)\mathrm{d}y_3 + B_3(x_1, x_2, 0) \\
&= \int_0^{x_3} \frac{\partial B_3}{\partial y_3}(x_1, x_2, y_3)\mathrm{d}y_3 + B_3(x_1, x_2, 0) \\
&= \big(B_3(x_1, x_2, x_3) - B_3(x_1, x_2, 0)\big) + B_3(x_1, x_2, 0) \\
&= B_3(x_1, x_2, x_3)
\end{aligned}$$

が成り立つ．以上のことから，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ となり，$\boldsymbol{A}$ が望みのベクトルポテンシャルであることが確かめられた. (証明終)

スカラーポテンシャルのときと同様，ベクトル場 $\boldsymbol{B}$ が特異点をもっていて全空間 $\mathbf{R}^3$ で定義されていない場合には，大域的にベクトルポテンシャルが存在するとは限らず，ベクトル場の定義域に制限が付くことになる．スカラーポテンシャルの場合は，定義域を単連結領域に制限することにより，ポテンシャルの存在と条件 (7.1) の同値性を証明できた．ベクトルポテンシャルの場合には，単連結領域に制限しただけでは，ベクトルポテンシャルの存在と条件 (7.2) の同値性は証明できない．この辺り，位相的に面倒な状況となっている．