レポート問題７ (関数方程式第１)　　　　Nov. 19, 2008 (Wed.)

$\boxed{1}$ $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \subseteq L^1(\mathbf{R}^n)$ を示せ.

$\boxed{2}$ テスト関数の列 $\phi, \phi_j \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ $(j = 1, 2, 3, \dots)$ に対して,

$$\lim_{j\to\infty} \phi_j = \phi \ \text{ in } \ \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{j\to\infty} \phi_j = \phi \ \text{ in } \ \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$$

を示せ.

$\boxed{3}$ 超関数としての次の極限を証明せよ.

(1) $\displaystyle\lim_{j\to\infty} \sin jx = 0 \ \text{ in } \ \mathcal{D}'(\mathbf{R})$

(2) $\displaystyle\lim_{j\to\infty} (\sin jx)^2 = \frac{1}{2} \ \text{ in } \ \mathcal{D}'(\mathbf{R})$

注意：超関数に対しては一般に積が定義出来ないが，仮に定義できる場合でも，$\displaystyle\lim_{j\to\infty} T_j = T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ かつ $\displaystyle\lim_{j\to\infty} S_j = S$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ のとき $\displaystyle\lim_{j\to\infty} T_j S_j = TS$ が成り立つとは限らない，ということが上の例から分かる.

レポート作成上の注意

- Ａ４版のレポート用紙を使用し、表紙を付けること。表紙には科目名、レポート番号、学籍番号、氏名を記入すること。
- 最終的な答えだけでなく、途中計算を分かりやすく説明すること。
- ワープロ、ＴＥＸ等は使用せず、手書きで（丁寧な字で）作成すること。
- レポートは次回の講義終了後に回収する。